

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT BIELEFELD

Reine Mathematik

Komplexe Analysis und Geometrie

Dozent: Hsch.-Doz. PhD. Kim A. Frøyshov

SS 2004, WS 2004/05, SS 2005

Stand: März 2006

Komplexe Analysis und Geometrie

Hsch.-Doz. PhD. Kim A. Frøyshov

**Komplexe Analysis
und Geometrie**
Reine Mathematik
Vorlesungsmitschrift

Dozent: Hsch.-Doz. PhD. Kim A. Frøyshov.
SS 2004, WS 2004/05, SS 2005
Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld,
Germany.
<http://www.mathematik.uni-bielefeld.de>
<http://www.uni-bielefeld.de>

Skript: Dr. Benjamin Jurke, mail@benjaminjurke.net.
Letzte Änderung: 2. Dezember 2011.
<http://benjaminjurke.net>

Schriftbild: Modern Times 11 pt *Satzsystem:* L^AT_EX 2_ε mit A_MS-L^AT_EX, METAFONT, X_Y-pic

Enthält Literaturangaben und einen Index.

Copyright © 2004 - 2011 Hsch.-Doz. PhD. Kim A. Frøyshov, Dr. Benjamin Jurke.
Die Verteilung dieses Dokuments in elektronischer oder gedruckter Form ist gestattet, solange sein Inhalt einschließlich Autoren- und Copyright-Angabe unverändert bleibt und die Verteilung kostenlos erfolgt, abgesehen von einer Gebühr für den Datenträger, den Kopiervorgang, etc.

Inhaltsverzeichnis

I. Funktionentheorie	1
1. Grundlagen komplexer Funktionen	2
1.1. Der Körper der komplexen Zahlen	2
1.1.1. Definition und Rechengesetze	2
1.1.2. Geometrische Interpretation	3
1.2. Differenzierbarkeit komplexer Funktionen	4
1.2.1. Holomorphe Funktionen	4
1.2.2. Reelle und komplexe Differenzierbarkeit	5
1.2.3. Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen	6
1.2.4. Differenzierbarkeit komplexer Polynome	6
1.2.5. Differenzierbarkeit elementarer Funktionen	7
1.3. Funktionenfolgen	7
1.3.1. Mehrdimensionale Integrale	7
1.3.2. Punktweise und gleichmäßige Konvergenz	8
1.4. Potenzreihen	9
1.4.1. Konvergenzradien	9
1.4.2. Holomorphie von Potenzreihen	9
1.5. Elementare Funktionen	10
1.5.1. Die Exponentialfunktion	10
1.5.2. Trigonometrische Funktionen	10
2. Integration komplexer Funktionen	12
2.1. Kurvenintegrale	12
2.1.1. Integrationswege und Kurvenintegrale	12
2.1.2. Eigenschaften von Kurvenintegralen	13
2.1.3. Modifikationen des Integrationsweges	13
2.2. Stammfunktionen	14
2.2.1. Der verallgemeinerte Hauptsatz	14
2.2.2. Stammfunktionen und ihre Eigenschaften	15
2.2.3. Existenz von Stammfunktionen	16
2.3. Homotopieinvarianz des Integrals	16
2.4. Der komplexe Logarithmus	18
2.4.1. Konstruktion und Definition des Hauptzweigs	19
2.4.2. Zweige des Logarithmus	20
3. Holomorphe Funktionen	21
3.1. Die Cauchysche Integralformel und Folgerungen	21
3.1.1. Beweis der Cauchy-Formel	21
3.1.2. Taylorreihen-Entwicklung	22

3.2.	Folgerungen und die Cauchysche Ungleichung	23
3.2.1.	Nullstellen holomorpher Funktionen	23
3.2.2.	Cauchy-Ungleichung und Gebietstreue	24
3.3.	Minimums-/Maximums-Prinzip und Mittelwerteigenschaft	25
3.3.1.	Maximums- und Minimums-Prinzip für holomorphe Funktionen	25
3.3.2.	Verallgemeinertes Maximums-Prinzip für stetige Funktionen	26
3.4.	Ganze Funktionen und Polynome	26
3.4.1.	Eigenschaften und Abschätzung von Polynomen	27
3.4.2.	Transzendente Funktionen	27
4.	Isolierte Singularitäten	29
4.1.	Singularitäten	29
4.2.	Laurent-Reihen	30
4.2.1.	Zerlegung in Haupt- und Nebenteil	30
4.2.2.	Taylorentwicklung von Haupt- und Nebenteil	30
4.2.3.	Definition der Laurent-Reihen	31
4.2.4.	Laurent-Reihen und isolierte Singularitäten	32
5.	Die verallgemeinerte Cauchy-Formel	34
5.1.	Umlaufzahlen	34
5.2.	Wegkomponenten	34
5.3.	Verallgemeinerte Cauchy-Formel	36
6.	Residuenkalkül	37
6.1.	Das Residuum	37
6.1.1.	Definition und Berechnung des Residuums	37
6.1.2.	Residuenberechnung bei rationalen Funktionen	38
6.2.	Der Residuensatz	39
6.3.	Anwendung des Residuensatzes	39
6.3.1.	Rationale Funktionen $R(\cos t, \sin t)$	39
6.3.2.	Gewöhnliche rationale Funktionen	40
6.3.3.	Rationale Funktionen $R(x)e^{ix}$ ohne reelle Pole	41
6.3.4.	Rationale Funktionen $R(x)e^{ix}$ mit einfachen reellen Polen	41
6.3.5.	Rationale Funktionen und das „Schlüsselloch-Integral“	42
7.	Umkehrung von Funktion und unendliche Partialbruchzerlegung	44
7.1.	Das Prinzip vom Argument	44
7.2.	Umkehrung holomorpher Funktionen	44
7.2.1.	Der Darstellungs- und Umkehrbarkeitssatz	45
7.2.2.	Nullstellen- und Pol-Anzahlen meromorpher Funktionen	46
7.3.	Unendliche Partialbruchzerlegung	46
7.3.1.	Holomorphe Funktionenfolgen	47
7.3.2.	Partialbruchzerlegung von $\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$	47
7.3.3.	Partialbruchentwicklung des Kotangens und Tangens	48
7.3.4.	Bernoulli-Zahlen und die Dirichlet-Reihe	49
7.3.5.	Bernoulli-Zahlen als Kotangens-Taylorkoeffizienten	50
8.	Elliptische Funktionen	51

8.1. Gruppentheoretische Vorbereitungen	51
8.2. Elliptische Funktionen und ihre Eigenschaften	52
8.3. Die Weierstraßsche elliptische Funktion	53
8.3.1. Konstruktion und Laurent-Entwicklung	53
8.3.2. Alternativer Zugang durch Differentialgleichungen	54
8.3.3. Elliptischer Funktionen als rationale Weierstraß-Funktionen	55
8.4. Elliptische Funktionen von elliptischen Integralen	55
9. Geometrische Funktionentheorie und biholomorphe Abbildungen	57
9.1. Von der Zahlenebene zur Zahlenkugel	57
9.2. Lineare Transformationen	58
9.2.1. Grundlegende Eigenschaften und Gruppenstruktur	58
9.2.2. Fixpunkte, Eindeutigkeit und Konstruktion	59
9.3. Spezielle Typen linearer Transformationen	59
9.3.1. Zerlegung in Drehstreckung, Translation und Inversion	59
9.3.2. Geometrische Interpretation	60
9.4. Die Automorphismengruppe	60
9.4.1. Holomorphe, meromorphe und biholomorphe Abbildungen	60
9.4.2. Die Gruppe der Selbstabbildungen und linearen Transformationen	61
9.5. Vorbereitungen zum Riemannsche Abbildungssatz	62
9.6. Der Riemannsche Abbildungssatz	62
9.7. Harmonische Funktionen	63
9.7.1. Definition und elementare Eigenschaften	63
9.7.2. Das Dirichlet-Problem, Poisson-Integrale und Fourier-Transformation	65
Literaturverzeichnis	67
II. Riemannsche Flächen	69
10. Komplexe Analysis auf komplexen Mannigfaltigkeiten	70
10.1. Komplexe Mannigfaltigkeiten und Holomorphie	70
10.1.1. Mehrdimensionale Holomorphie	70
10.1.2. Komplexe Mannigfaltigkeiten und der $\mathbb{C}P^n$	71
10.1.3. Der komplexe Tangentialraum	72
10.2. Komplexe Untermannigfaltigkeiten	73
10.3. Erste Beispiele Riemannscher Flächen	74
10.3.1. Grundlegende Definition	74
10.3.2. Tori als Riemannsche Flächen	75
10.4. Eigenschaften holomorpher Abbildungen	75
10.4.1. Lokale Gestalt holomorpher Funktionen und Verzweigungspunkte	76
10.4.2. Überlagerungen	76
10.4.3. Eigentliche Abbildungen	77
11. Meromorphe Funktionen	79
11.1. Die Ordnung eines Pols und einer Nullstelle	79
11.2. Elementarsymmetrische Funktionen	80
11.2.1. Konstruktion der elementarsymmetrischen Funktionen	80

11.2.2. Eigenschaften und Fortsetzbarkeit	81
11.3. Körpererweiterungen	82
11.3.1. Algebraische Hilfsmittel	82
11.3.2. Der induzierte Meromorphiemonomorphismus	83
11.3.3. Rationale Funktionen und irreduzible Polynome	83
12. Polynome und Riemannsche Flächen	85
12.1. Nullstellenmengen komplexer Polynome	85
12.2. Diskriminanten	85
12.3. Der Locus und Riemannsche Flächen	86
12.3.1. Die Nullstellenmenge als Riemannsche Fläche	86
12.3.2. Decktransformationen und Überlagerungen	86
12.3.3. Existenz kompakter Riemannscher Flächen	87
12.4. Anwendungen und Beispiele	88
12.5. Isomorphiesätze	91
12.5.1. Isomorphie mit der homogenen Form eines Polynoms	91
12.5.2. Meromorphe Funktion und die Koordinatenfunktionen	91
12.5.3. Abschließende Isomorphiesätze	92
12.6. Das Geschlecht einer Mannigfaltigkeit	93
12.7. Topologie von Hyperflächen in $\mathbb{C}P^n$	94
13. Garben und Garbencohomologie	96
13.1. Garben, Prägarben und Halme	96
13.2. Der Étale-Raum einer Prägarbe	97
13.3. Garben-Abbildungen und algebraische Objekte	98
13.3.1. Homomorphismen und die Verbindung zu Schnitten	98
13.3.2. Quotienten, Kern, Bild und Exaktheit von Garben	99
13.3.3. Beispiele zur Exaktheit von Garbenhomomorphismen	101
13.4. Čech-Konstruktion und Garbencohomologie	102
13.4.1. Čech-Coketten, Čech-Ableitungsoperator und Čech-Cohomologie	102
13.4.2. Verfeinerungen von Überdeckungen	103
13.4.3. Der induktive Limes	104
13.4.4. Garbencohomologie	105
14. Vektorbündel- und Prägarben-Cohomologie	106
14.1. Holomorphe Vektorbündel	106
14.2. Die Čech-Cohomologie von Geradenbündel	107
14.2.1. Konstruktion der Geradenbündel-Čech-Cohomologieklassen	107
14.2.2. Isomorphismen-Klassifikation holomorpher Geradenbündel	108
14.3. Gleichheit der Čech- und Garben-Cohomologie-Gruppen	108
14.4. Abstrakte Cohomologietheorie	109
14.4.1. Allgemeine Cohomologie und induktiver Limes	109
14.4.2. Exakte Cohomologiesequenzen	110
14.5. Prägarben-Cohomologie	111
15. Anwendung der Cohomologietheorien	114
15.1. Verbindung zwischen Garben- und Prägarben-Cohomologie	114
15.2. Gleichheit von Cohomologietheorien	114

15.2.1. Feine Garben	114
15.2.2. Azyklische Garben, Auflösungen und die de Rham-Cohomologie	116
15.3. Die Garbe \mathcal{O} einer Riemannschen Fläche	117
15.3.1. Das Dolbeaultsche Lemma	118
15.3.2. Auflösung von \mathcal{O} und das Geschlecht einer Mannigfaltigkeit	118
15.4. Differentialformen auf komplexen Mannigfaltigkeiten	119
15.4.1. Komplex-lineare und anti-lineare Differentialformen	119
15.4.2. Die Dolbeault-Cohomologie	121
15.5. Differentialformen mit Werten in einem Vektorbündel	122
15.6. Hilberträume	124
15.6.1. Fundamentale Eigenschaften von Hilberträumen	124
15.6.2. Funktionalanalytische Hilfsmittel	125
16. Geschlecht, Divisoren und Schnitte	128
16.1. Endlichkeitssätze	128
16.1.1. Der Hilbertraum der holomorphen Vektorbündel-Schnitte	128
16.1.2. Cohomologie quadratintegrabler holomorpher Schnitte	129
16.1.3. Wohldefiniertheit des Geschlechts	131
16.2. Meromorphe Schnitte von Vektorbündeln	131
16.3. Divisoren und Geradenbündel	132
16.4. Residuen holomorpher 1-Formen	133
16.5. Cohomologie und Geradenbündel	135
Literaturverzeichnis	136
III. Komplexe Geometrie	137
17. Der Satz von Riemann-Roch	138
17.1. Divisoren und Geradenbündel (Fortsetzung)	138
17.2. Wolkenkratzergeraden	139
17.3. Das Theorem von Riemann und Roch	139
17.3.1. Ein-Punkt-Divisoren	140
17.3.2. Euler-Charakteristik und der Beweis des Satzes	140
17.3.3. Alternative Formulierungen und die Verbindung zum Index	141
18. Serre-Dualität	142
18.1. Die Serre-Dualitätsabbildungen	142
18.1.1. Lokale Beschreibung der Dualitätsabbildung	142
18.1.2. Poincaré- und Serre-Dualität	143
18.2. Topologische Invarianz des Geschlechts	144
18.2.1. Betti- und Hodge-Zahlen und Anwendung der Serre-Dualität	144
18.2.2. Beweis der Invarianz und Neuformulierung von Riemann-Roch	144
18.3. Das kanonische Dualbündel des Tangentialbündels	145
18.4. Die Riemann-Hurwitz-Formel	145
18.5. Einbettungen in projektive Räume	146
18.5.1. Konstruktion der Einbettungsabbildung	147
18.5.2. Kriterien für die Einbettungseigenschaft	147

Inhaltsverzeichnis

18.6. Tori und das Geschlecht Eins	148
18.7. Weierstraßpunkte und Automorphismengruppen	150
18.7.1. Digression: Wronski-Determinanten	152
18.8. Die Picard-Gruppe	154
Literaturverzeichnis	156
Index	157

Teil I.

Funktionentheorie

1. Grundlagen komplexer Funktionen

Erste Ansätze der Funktionentheorie finden sich bereits im 18. Jahrhundert bei L. EULER. Denkwürdige Zeilen zu diesem Thema verfasste C. F. GAUSS in einem Brief an BESSEL. Entscheidende Beiträge zur Theorie der komplexen Funktionen lieferte schließlich B. RIEMANN, dessen weitreichende Erkenntnisse um die Riemannschen Flächen genug Stoff für den zweiten Teil liefern.

1.1. Der Körper der komplexen Zahlen

Eine sinnvolle Darstellung der Funktionentheorie muss notwendigerweise mit einer Beschreibung der komplexen Zahlen \mathbb{C} geinuen.

1.1.1. Definition und Rechengesetze

Das Hauptproblem der reellen Algebra bzw. der reellen Zahlen ist, dass es keine reelle Zahl x mit $x^2 + 1 = 0$ gibt. Es liegt nahe, eine symbolische Lösung „ i “ dieser Gleichung einzuführen. Eine komplexe Zahl ist dann ein Ausdruck der Form $a + bi$ mit den reellen Zahlen a und b .

Definition 1: Eine **komplexe Zahl** ist ein geordnetes Paar (a, b) von zwei reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, entspricht also einem Punkt in der euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 . **Addition** und **Multiplikation** zweier komplexer Zahlen werden wie folgt definiert:¹

1. $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
2. $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$

Die Menge \mathbb{C} entspricht also salopp gesagt „ \mathbb{R}^2 mit den obigen beiden Rechenoperationen“, und wird auch als **Gaußsche Zahlenebene** bezeichnet.

Satz 2: Für die Addition und Multiplikation zweier komplexer Zahlen gilt das Kommutativ-, Assoziativ- und Distributiv-Gesetz, außerdem existiert jeweils ein neutrales Element.

Eine **reelle Zahl** $a \in \mathbb{R}$ wird mit $(a, 0) \in \mathbb{C}$ identifiziert, während die Einbettung der symbolischen Lösung $i := (0, 1)$ ist. Auf diese Weise lässt sich die Menge der reellen Zahlen in die Menge der komplexen Zahlen einbetten, und die Einschränkung der komplexen Rechengesetze auf $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ liefert dieselben Ergebnisse, wie im reellen Fall. Für das Quadrat der symbolischen Konstante „ i “ gilt

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 .$$

Wir definieren $|a + bi| := \sqrt{a^2 + b^2}$ als **Betrag** von $a + bi$, den **reellen Teil** durch $\Re(a + bi) := a$ und analog $\Im(a + bi) := b$ als den **imaginären Teil** einer komplexen Zahl. Die Operation

¹Man erhält die gleichen Rechengesetze, wenn man die **Kommutativität**, **Assoziativität** und **Distributivität** voraussetzt, dann mit der Darstellung $z = x + iy$ die Summe bzw. das Produkt formal zu den Potenzen der symbolischen Lösung „ i “ zusammenfasst, und schließlich $i^2 = -1$ verwendet. Strenggenommen ist dies aber ein Kreisschluß, zeigt aber, dass Addition und Multiplikation komplexer Zahlen „natürlich“ erfolgen.

der **komplexen Konjugation** ist durch $\overline{a + bi} := a - bi$ definiert, es wird also die imaginäre Komponente einer komplexen Zahl negiert. Es folgt

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |a + bi|^2 ,$$

also ist $z\bar{z} = |z|^2$. Für $0 \neq z = a + bi$ erhält man damit dann ein multiplikativ **inverses Element** durch

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} .$$

Zusammen mit dem vorigen Satz bildet die Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen dann einen **Körper**. Weiter erfüllt die komplexe Konjugation $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, wie man direkt nachrechnet, und damit folgt zusammen mit der Kommutativität für den Betrag

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2 \iff |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| .$$

1.1.2. Geometrische Interpretation

Wie lässt sich die rein algebraisch definierte komplexe Multiplikation geometrisch beschreiben? Zunächst betrachten wir, dass sich jeder Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in der Form

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

durch **Polarkoordinaten** ausdrücken lässt, sodass (r, θ) die polaren Koordinaten von (x, y) sind. Falls $(x, y) \neq (0, 0)$ ist, so sind diese bis auf $\theta + 2k\pi$ eindeutig bestimmt. Es gilt also $z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta$, wobei $\theta = \arg z$ das **Argument** von z ist.

Betrachten wir nun die Multiplikation zweier komplexer Zahlen in der Polarkoordinatendarstellung, so folgt aus den Sinus-/Kosinus-Additionstheoremen direkt

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi} .$$

Zusammen mit $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$ lässt sich die Multiplikation zweier komplexer Zahlen dann als **Drehstreckung** in der komplexen Zahlenebene interpretieren, wobei die reellen Anteile den Streckfaktor und die imaginären Anteile den Drehwinkel bestimmen.

Definition 3: Für ein festes $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ sei die ε -**Kreisscheibe** um den Punkt z_0 als die Menge

$$D_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\} .$$

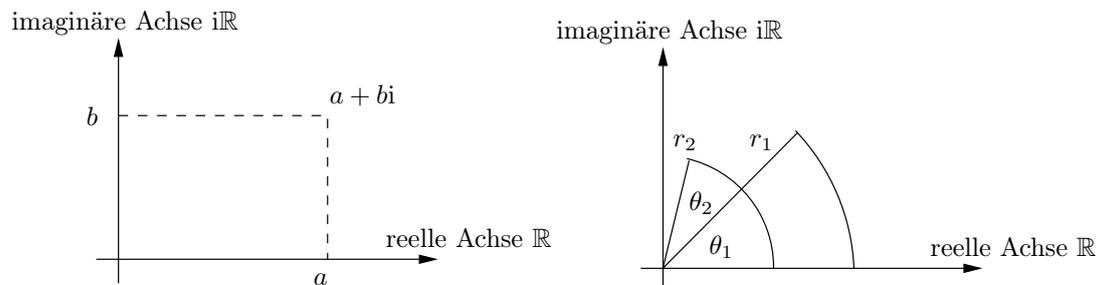


Abbildung 1.1.: Die Gaußsche Zahlenebene in kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten.

definiert. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heißt **Umgebung** von z_0 , falls $D_\varepsilon(z_0) \subset U$ für irgendein $\varepsilon > 0$ gilt, d.h. um z_0 lässt sich eine ε -Kreisscheibe finden, die vollständig in U liegt. Dann heißt $U \subset \mathbb{C}$ **offen**, falls für alle Punkte $z_0 \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit $D_\varepsilon(z_0) \subset U$ existiert. $V \subset \mathbb{C}$ heißt umgekehrt **abgeschlossen**, falls das **Komplement** $\mathbb{C} \setminus V$ offen ist.

1.2. Differenzierbarkeit komplexer Funktionen

1.2.1. Holomorphe Funktionen

Eine der ersten Fragen, die sich auf diesem neuen Zahlenkörper \mathbb{C} stellt, ist wohl diejenige nach der Form und des Verhaltens von Funktionen auf ihr - eigentlich handelt die ganze Vorlesung von nichts anderem. Es wird sich zeigen, dass insbesondere komplex differenzierbare Funktionen viele zunächst vom Reellen unerwartete Eigenschaften haben.

Definition 4: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung und $z_0 \in U$ ein fester Punkt. f heißt **komplex differenzierbar** in z_0 , wenn der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert, d.h. aus allen Annäherungsrichtungen innerhalb der komplexen Zahlenebene den gleichen Wert hat.

Definition 5: Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heißt **holomorph**, wenn sie in allen Punkten von U komplex differenzierbar ist. Oftmals (insbesondere in der Physik) wird eine holomorphe Funktion auch als **analytisch** bezeichnet.

Beispiel: 1. Sei $f(z) := az + b$ mit konstanten Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ eine lineare Funktion. Dann gilt für den Ableitungsquotienten an einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(az + b) - (az_0 + b)}{z - z_0} = a,$$

also ist f mit der Ableitung $f'(z) = a$ holomorph auf ganz \mathbb{C} .

2. Sei $f(z) := \bar{z}$ die Funktion der komplexen Konjugation. Wegen

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}$$

ist der Grenzwert hier nicht so einfach abzulesen. Wir linearisieren den Grenzwertprozess, in dem wir durch ein passendes $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ den Punkt z durch $z = z_0 + tw$ darstellen. Dann folgt im Grenzwert

$$\frac{\overline{z_0 + tw} - \bar{z}_0}{z_0 + tw - z_0} = \frac{\overline{tw}}{tw} = \frac{\bar{w}}{w}.$$

Bereits bei Betrachtung von $w \in \mathbb{R}$ und $w \in i\mathbb{R}$ erhalten wir die unterschiedlichen Grenzwerte $+1$ und -1 , die Konjugationsfunktion f ist also in keinem Punkt komplex differenzierbar.

3. Die Funktion $f(z) := \frac{1}{z}$ ist mit der Ableitung $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph.

Wegen der Linearität der Differentiation, genauer gesagt des Grenzprozesses der Differentiation, und der Darstellung $f = \Re(f) + i \cdot \Im(f)$ einer komplexwertigen Funktion, übertragen sich die reellen **Differentiations-Gesetze** auch auf komplexe Funktionen:

1. **Summenregel:** $(f + g)' = f' + g'$
2. **Produktregel:** $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
3. **Kettenregel:** $(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$ für $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} \mathbb{C}$ mit $U, V \subset \mathbb{C}$ offen.

1.2.2. Reelle und komplexe Differenzierbarkeit

Beim Versuch die Konjugationsfunktion komplex zu differenzieren trifft man auf einen gravierenden Unterschied zur reellen Differentiation, wo die Ableitung von $(a, b) \mapsto (a, -b)$ problemlos möglich ist. Wir werden daher nun die Unterschiede zwischen reeller und komplexer Differenzierbarkeit genauer untersuchen. Zunächst aber zur Erinnerung:

Definition 6: Die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **reell differenzierbar**² im Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, falls es eine reell-lineare Abbildung $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit

$$\frac{f(z) - f(z_0) - L(z - z_0)}{z - z_0} \rightarrow 0 \quad \text{wenn } z \rightarrow z_0 .$$

Reell-linear bedeutet $L(z_1 + z_2) = L(z_1) + L(z_2)$ sowie $L(\alpha z) = \alpha L(z)$ für reelle Skalare $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Abbildung L wird im obigen Fall üblicherweise mit Df_{z_0} bezeichnet.

Wir führen zunächst ein wenig Notation ein. Für eine komplexe Zahl sei $z = x + iy$ die übliche Zerlegung. Mit den partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, bezeichnen wir die innerhalb der komplexen Zahlenebene entlang oder senkrecht zur reellen Achse vorgenommenen Differentiationen, d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) := \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}} \frac{f(z+t) - f(z)}{t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z) := \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}} \frac{f(z+it) - f(z)}{it} ,$$

außerdem definieren wir die Ableitungsoperatoren ∂f und $\bar{\partial} f$ als

$$\partial f := \frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad \bar{\partial} f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) .$$

Satz 7: Die folgenden Aussagen über die reelle und komplexe Differenzierbarkeit einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ an einem Punkt $z_0 \in U$ mit $U \subset \mathbb{C}$ offen sind äquivalent:

1. f ist komplex differenzierbar in z_0 .
2. f ist reell differenzierbar in z_0 und es gibt eine komplexe Zahl $w \in \mathbb{C}$ mit $Df_{z_0}(z) = wz$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
3. f ist reell differenzierbar in z_0 und $\bar{\partial} f(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$.

²Dieses ist die ursprüngliche Definition aus der Analysis II in einer abgewandelten Notation. Ersetzt man \mathbb{C} durch \mathbb{R}^2 , so erhält man einen Spezialfall der allgemeinen Formulierung.

1.2.3. Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

Sei nun $U \subset \mathbb{C}$ offen und $g, h : U \rightarrow \mathbb{R}$ zwei reell differenzierbare Funktionen, wir betrachten $f := g + ih$. Wann ist die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ dann holomorph? Nach dem vorigen Satz 7 ist eine reell differenzierbare Funktion genau dann holomorph, wenn $\bar{\partial}f = 0$ gilt, sprich

$$2 \cdot \bar{\partial}f \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (g + ih) = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) = 0 ,$$

also müssen die folgenden beide Gleichheiten gelten:

$$f \text{ holomorph} \iff \bar{\partial}f = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} \end{array} \right\}$$

Die letzten beiden Gleichungen heißen **Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen**. Sie bieten ein relativ einfach anzuwendendes Kriterium, um zu entscheiden, ob eine Funktion holomorph ist.

1.2.4. Differenzierbarkeit komplexer Polynome

Betrachten wir nun, welche Polynome der allgemeinen Form

$$P(x, y) := \sum_{0 \leq j, k \leq n} a_{jk} x^j y^k \quad \text{mit} \quad a_{jk} \in \mathbb{C}$$

holomorphe Funktionen auf \mathbb{C} definieren. Mittels der üblichen Zerlegung $z = x + iy$ und $\bar{z} = x - iy$ können wir umgekehrt durch $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ das Polynom in die Form

$$P(z) = \sum_{0 \leq j, k \leq n} b_{jk} z^j \bar{z}^k \quad \text{mit} \quad b_{jk} \in \mathbb{C}$$

als passende Koeffizienten umschreiben. Falls $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge ist und die Funktionen $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ reell differenzierbar sind, so gilt nach der Produktregel $\frac{\partial}{\partial x}(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x}$ und analog für $\frac{\partial}{\partial y}$. Für unsere Differentialoperatoren folgt damit

$$\partial(f \cdot g) = (\partial f) \cdot g + f \cdot (\partial g) \quad \text{und} \quad \bar{\partial}(f \cdot g) = (\bar{\partial} f) \cdot g + f \cdot (\bar{\partial} g) .$$

Satz 8: Die Polynom-Funktion $P(z) := \sum_{0 \leq j, k \leq n} b_{jk} z^j \bar{z}^k$ ist genau dann eine holomorphe Funktion auf ganz \mathbb{C} , wenn $b_{jk} = 0$ für alle $k \geq 1$ gilt. In diesem Fall ist $P(z) = \sum_{j=0}^n b_{j,0} z^j$ ein **komplexes Polynom**.

Dieses Ergebnis ist nicht unerwartet, da wir im Beispiel von Seite 4 bereits gesehen haben, dass die komplexe Konjugation nicht komplex differenzierbar ist. Nach dem Satz sind die komplexen Polynome somit von der „altbekannten“ Form

$$P(z) = \sum_{i=1}^n a_i z^i .$$

1.2.5. Differenzierbarkeit elementarer Funktionen

Lemma 9: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt $f' = \partial f = \frac{\partial f}{\partial x}$.

Dies liefert uns nun eine sehr praktische Aussage, da wir alle aus elementaren holomorphen Funktionen zusammengesetzte Abbildungen wie reell differenzierbare Funktionen behandeln können, und über die „altbekannte“ Ableitung die komplexe Ableitung erhalten.

Definition 10: Eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ heißt **zusammenhängend**, falls es keine nicht-leeren, offenen Mengen $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $U = U_1 \cup U_2$ gibt.

Beispiel: $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend.

Definition 11: Wir nennen eine nicht-leere, offene und zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{C} ein **Gebiet**.

Satz 12: Sei U ein Gebiet und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph sowie $f' = 0$. Dann ist f konstant.

Somit überträgt sich eine weitere aus der reellen Analysis bekannte Aussage, „Ändert sich eine Funktion nicht, so ist sie konstant!“, ebenfalls auf holomorphe und analytische Funktionen.

1.3. Funktionenfolgen

Im weiteren Verlauf des Kapitels werden wir nun einige Ergebnisse aus der reellen Analysis wiederholen, hauptsächlich die verschiedenen Konvergenzbegriffe und elementare Aussagen zu Potenzreihen.

1.3.1. Mehrdimensionale Integrale

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, also $f = (f_1, \dots, f_n)$ mit $f_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ als Komponentenfunktionen - eine solche Funktion kann man sich als eindimensionale Linie bzw. Kurve im \mathbb{R}^n vorstellen. Dann definieren wir die Notation

$$\int_a^b f := \left(\int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_n \right),$$

d.h. wir integrieren einfach komponentenweise. Für $n = 2$ sei dann für eine komplexe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ wegen $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ analog

$$\int_a^b f := \int_a^b \Re(f) + i \int_a^b \Im(f).$$

Lemma 13: Falls $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung ist, so gilt für $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$T \circ \int_a^b f = \int_a^b T \circ f.$$

Satz 14: Für Integrale der vorigen Form gilt die Abschätzung

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

1.3.2. Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Definition 15: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $\{f_k : U \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge. Dann ist

1. $f_k \rightarrow f$ **punktweise** auf U konvergent, falls für alle Punkte $x \in U$ die Differenz

$$|f_k(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

für $k \rightarrow \infty$ geht.

2. $f_k \rightarrow f$ **gleichmäßig** auf U konvergiert, falls die maximale Differenz

$$\max_{x \in U} |f_k(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

für $k \rightarrow \infty$ geht. Dies impliziert trivialerweise auch punktweise Konvergenz. Das Prinzip der gleichmäßigen Konvergenz ist in Abbildung 1.2 dargestellt.

Beispiel: Natürlich gibt es auch Funktionenfolgen, die zwar punktweise konvergent, nicht aber gleichmäßig konvergent sind. Auf $U = [0, 1]$ betrachte man für die reellen Dimensionen $m = n = 1$ die Abbildungen

$$f_k(x) = \begin{cases} kx & : 0 \leq x \leq \frac{1}{k} \\ 2 - kx & : \frac{1}{k} \leq x \leq \frac{2}{k} \\ 0 & : \frac{2}{k} \leq x \leq 1 \end{cases},$$

wie in Abbildung 1.3 für $k = 2$ dargestellt. Dann konvergiert $f_k \rightarrow 0$ punktweise auf $[0, 1]$, aber es gilt $\max_{x \in [0, 1]} |f_k(x)| = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Zwei weitere bekannte Sätze aus der Analysis I sind die Folgenden:

Satz 16: Falls die Funktionenfolge $f_k \rightarrow f$ gleichmäßig konvergiert und jede einzelne Funktion f_k stetig ist, dann ist auch die Grenzfunktion f stetig. \square

Satz 17: Sei $\{f_k : U \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge, dann konvergiert f_k genau dann gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f , wenn

$$\max_{x \in U} |f_k(x) - f_l(x)| \rightarrow 0$$

für $k, l \rightarrow \infty$ geht. \square

Die nachfolgenden zwei Sätze liefern nun zwei wichtige - allerdings ebenfalls aus der Analysis I bekannte - Aussagen über die Vertauschbarkeit von Grenzwertbildung, Integral und Differentiation.

Satz 18: Sei $\{f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Folge von stetigen Abbildungen. Dann gilt die **Vertauschbarkeit von Limes und Integral**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k = \int_a^b \lim_{k \rightarrow \infty} f_k.$$

Satz 19: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\{f_k : U \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge. Sei $1 \leq j \leq n$ und außerdem gelten die folgenden drei Bedingungen

1. $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ existiert und ist für alle k stetig,
2. $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise auf U ,
3. $\{\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf U .

Dann gilt $\frac{\partial}{\partial x_j} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$, d.h. die **Vertauschbarkeit von Limes und Differentiation**.

1.4. Potenzreihen

Später werden allgemeine Potenzreihen zu einem der wichtigsten Objekte der Funktionentheorie werden, und wir werden überaus nützliche Sätze zur Taylor- und Laurent-Reihenentwicklung beweisen. Zunächst aber wiederholen wir die bereits bekannten Aussage aus der Analysis I.

1.4.1. Konvergenzradien

Im Folgenden betrachten wir nun Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, wobei wir Aussagen über ihre Konvergenzeigenschaften tätigen. Ein bekanntes Analysis I-Ergebnis liefert der folgende Satz:

Satz 20: Seien $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{C}$. Definiere den **Konvergenzradius** $R \in [0, \infty \cup \{\infty\}]$ mit $\frac{1}{0} := \infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$ durch

$$\frac{1}{R} := \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \iff R := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Dann gelten folgende Aussagen für die Konvergenz einer Potenzreihe:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert absolut³ für $|z| < R$,
2. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ divergiert für $|z| > R$,
3. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert gleichmäßig auf $\overline{D_r(0)} = \{z : |z| \leq r\}$ für $0 < r < R$.

Bemerkung: Die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ der gliedweisen Ableitungen haben denselben Konvergenzradius R , weil $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gilt.

1.4.2. Holomorphie von Potenzreihen

Zuletzt betrachten wir nun die in der Funktionentheorie besonders interessierenden Holomorphieeigenschaften von Potenzreihen. Der folgende Satz liefert eine Verbindung zwischen Potenzreihen und ihren Ableitungen.

Satz 21: Sei $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für $|z| < R$ eine durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion. Dann ist f holomorph auf der offenen R -Kreisscheibe $D_R(0)$ und $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

³ **Absolut konvergent** bedeutet, dass neben $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n < \infty$ auch die Reihe der Absolutbeträge der Summanden konvergiert, also $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < \infty$. Insbesondere darf nach dem Riemannsche Umordnungssatz bei absolut konvergenten Reihen die Summationsreihenfolge vertauscht werden.

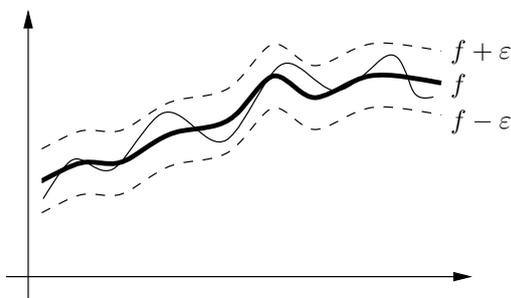


Abbildung 1.2.: Grafische Darstellung der gleichmäßigen Konvergenz.

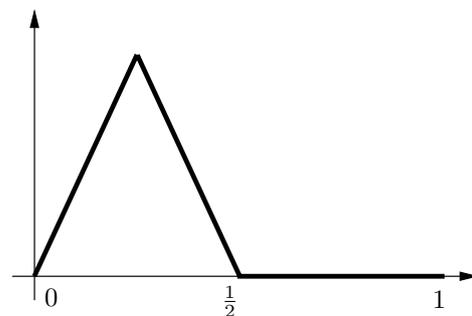


Abbildung 1.3.: Darstellung von f_2 einer nicht gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge.

1.5. Elementare Funktionen

Zum Abschluss des Kapitels untersuchen wir nun einige elementare Funktionen. Zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen besteht ein tiefer Zusammenhang, der erst für komplexe Argumente in Erscheinung tritt.

1.5.1. Die Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion für komplexe Argumente ist durch ihre reelle Taylor-Reihenentwicklung

$$e^z = \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

mit dem Konvergenzradius $R = \infty$ definiert, indem man einfach komplexe Argumente einsetzt. Wir können die reelle Eigenschaft $\frac{d}{dt}e^t = e^t$ auch im Komplexen durch

$$\frac{d}{dz}e^z = \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \stackrel{\text{Satz 19}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

verifizieren. Als nächstes zeigen wir eine weitere wichtige Eigenschaft der Exponentialfunktion:

Satz 22: Es gilt $e^{w+z} = e^w \cdot e^z$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$.

Damit haben wir aber noch nichts neues erhalten, sondern lediglich ein paar bekannte Gesetze auch explizit für das Komplexe gezeigt.

1.5.2. Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen **Sinus** und **Kosinus** sind ebenfalls durch ihre Taylorreihen

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{und} \quad \sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

für $z \in \mathbb{C}$ definiert, für ihre Ableitungen gilt folglich (da beide Reihen absolut konvergent sind) wie im reellen Fall

$$\cos'(z) = -\sin(z) \quad \text{und} \quad \sin'(z) = \cos(z) .$$

Durch Einsetzen der Taylorreihen und Aufspaltung in reelle und imaginäre Beiträge folgt die **Eulersche Identität** $e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$, umgekehrt lassen sich somit der Sinus und Kosinus mithilfe der Exponentialfunktion durch

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad \text{und} \quad \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

definieren. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist daher $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$. Mit dieser Identität lässt sich dann die trigonometrische Darstellung bzw. Polarkoordinatendarstellung durch

$$\begin{aligned} r = |e^z| = e^{\Re(z)} = e^x & \iff z = r e^{i\theta} \\ \theta = \arg e^z = \Im(z) = y & \end{aligned}$$

ausdrücken. Jede komplexe Zahl lässt sich also durch $z = x + iy = r e^{i\theta}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ sowie $r \in \mathbb{R}_0^+$ und $\theta \in [0, 2\pi[$ eindeutig darstellen - mit Ausnahme der Null in der trigonometrischen Darstellung.

Satz 23: Es gilt $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, die Exponentialfunktion hat also auch im Komplexen keine Nullstellen.

Zusätzlich zu den trigonometrischen Funktionen definieren wir noch den **Sinus hyperbolicus** und **Kosinus hyperbolicus** durch

$$\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \cos\left(\frac{z}{i}\right) \quad \text{und} \quad \sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = i \sin\left(\frac{z}{i}\right).$$

Satz 24: Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gelten folgende **trigonometrische Identitäten** bzw. **Additionstheoreme**:

1. $\cos(w + z) = \cos(w) \cos(z) - \sin(w) \sin(z)$,
2. $\sin(w + z) = \sin(w) \cos(z) + \cos(w) \sin(z)$,
3. $\cos(x + iy) = \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y)$,
4. $\sin(x + iy) = \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y)$.

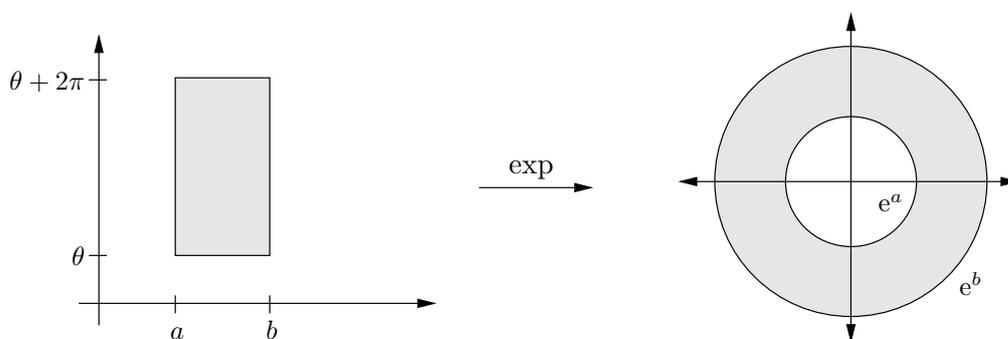


Abbildung 1.4.: Grafische Darstellung der Wirkung der komplexen Exponentialfunktion.

2. Integration komplexer Funktionen

Mit den im ersten Kapitel erläuterten und wiederholten Elementen gelangt man zu keinen tieferen Aussagen bei der Betrachtung komplex differenzierbarer Funktionen. Ein sehr wesentliches Werkzeug für die Untersuchung holomorpher Funktionen sind Integrale innerhalb der komplexen Zahlenebene \mathbb{C} , die wir nun untersuchen. Daraus werden wir die Existenz von Stammfunktionen folgern können und zudem einen komplexen Logarithmus als Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion definieren.

2.1. Kurvenintegrale

Zuerst betrachtet man nun sogenannte Kurvenintegrale. Diese entsprechen einfach ausgedrückt dem Integral einer Funktion entlang eines eindimensionalen Weges innerhalb der komplexen Ebene, wobei das Integral parametrisierungsunabhängig ist.

2.1.1. Integrationswege und Kurvenintegrale

Als erstes benötigen wir eine saubere Definition eines Integrationsweges und des darauf definierten Kurvenintegrals.

Definition 25: Eine stetige und stückchenweise stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **Integrationsweg**, d.h. es existieren $a = a_0 < \dots < a_k = b$, sodass die Einschränkung $\gamma|_{[a_{j-1}, a_j]}$ für $j = 1, \dots, k$ stetig differenzierbar ist.

Außerdem bezeichnen wir mit $\text{Sp}(\gamma) := \gamma([a, b])$ die **Spur** von γ , d.h. das Bild des Weges als Punktmenge in der komplexen Zahlenebene.

$$L(\gamma) := \int_a^b \underbrace{|\gamma'(t)|}_{\text{„Geschwindigkeit“}} dt$$

gibt die **Länge** der von γ beschriebenen Kurve an. Der Integrand des Längenintegrals lässt sich dabei als die Momentangeschwindigkeit der Parametrisierung γ interpretieren.¹

Definition 26: Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $f : \text{Sp}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist das **Kurvenintegral über γ** definiert durch

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt .$$

Bemerkung: Im Bezug zur Analysis III-Vorlesung können wir das Kurvenintegral auch anders interpretieren. Falls f auf einer offenen Menge definiert ist, so ist $f dz$ eine **komplexwertige 1-Form**, also gilt

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{[a,b]} \gamma^*(f dz) = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

¹Man beachte, dass die Länge $L(\gamma)$ der „Parametrisierungslänge“ entspricht, aber nicht unbedingt der Weglänge in der Ebene, da gleiche Linien mehrfach überlaufen werden können.

Betrachten wir nun eine kleine Anwendung der Definitionen:

Beispiel: Sei $\gamma(t) := re^{it}$ für $r > 0$ und $0 \leq t \leq 2\pi$ ein kreisförmiger Weg entgegen des Uhrzeigersinns um den Nullpunkt der komplexen Zahlenebene sowie $f(z) := \frac{1}{z}$, dann gilt

$$\oint_{\gamma} f dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} \cdot ire^{it} dt = 2\pi i .$$

Durch den kleinen Kreis im Integralsymbol soll angedeutet werden, dass über einen geschlossenen Weg (d.h. $\gamma(a) = \gamma(b)$) integriert wird.

2.1.2. Eigenschaften von Kurvenintegralen

In den nachfolgenden Sätzen führen wir nun die wichtigsten Eigenschaften von Kurvenintegralen auf. Zunächst folgt eine relativ grobe Abschätzung, dann der Beweis der Parametrisierungsinvarianz.

Satz 27: Für alle Integrationswege $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und stetige Funktionen $f : \text{Sp}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ gilt die Abschätzung

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq L(\gamma) \cdot \max_{a \leq t \leq b} |f(\gamma(t))| .$$

Satz 28: Sei der Integrationsweg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, die darauf definierte Funktion $f : \text{Sp}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und die **Umparametrisierung** $u : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_{\gamma \circ u} f(z) dz = \begin{cases} \int_{\gamma} f(z) dz & : u(a') = a, u(b') = b \\ - \int_{\gamma} f(z) dz & : u(b') = a, u(a') = b \end{cases} .$$

Ein Kurvenintegral ist also völlig unabhängig von der genauen Form der Parametrisierung oder Art und Weise, in der der Weg entlangelaufen wird. Wichtig ist nur, dass die gleiche Spur innerhalb der komplexen Ebene durchlaufen wird. Ähnlich dem Riemann-Integral ändert dabei die Umkehrung der Laufrichtung nur das Vorzeichen des Integrals.

Satz 29: Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, $f : \text{Sp}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und die Umparametrisierung $u : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ stetig, bijektiv und stückweise stetig differenzierbar, also insbesondere streng monoton. Dann ist $\gamma \circ u : [a', b'] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und

$$\int_{\gamma \circ u} f(z) dz = \begin{cases} \int_{\gamma} f(z) dz & : u \text{ wachsend} \\ - \int_{\gamma} f(z) dz & : u \text{ fallend} \end{cases} .$$

2.1.3. Modifikationen des Integrationsweges

Wir untersuchen nun, wie sich mehrere Integrationswege zusammensetzen lassen, und wie sich derartige Operationen am Integrationsweg auf das Integral auswirken. Der Weg und seine Ableitung lassen sich wie folgt interpretieren:

- $\gamma(t)$ gibt die **Position** in der komplexen Ebene \mathbb{C} an,
- $\gamma'(t)$ gibt den aktuellen **Geschwindigkeitsvektor** an.

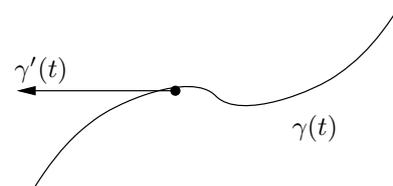


Abbildung 2.1.: Integrationsweg und Ableitung.

Diese Eigenschaften finden sich auch in der nebenstehenden Abbildung 2.1 wieder. Zwei einfache, aber wichtige Beispiele für Integrationswege sind die folgenden:

- Beispiel:** 1. Sei $\gamma(t) := (1-t)z_0 + tz_1$, dies parametrisiert die Strecke zwischen z_0 und z_1 .
 2. Für $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei $\gamma(t) := (t, f(t))$, dies beschreibt den Graph von f . Dies ist in Abbildung 2.2 dargestellt.

Zu einem Integrationsweg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ definieren wir den **entgegengesetzten Integrationsweg** durch

$$\gamma^{-1} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto \gamma(a + b - t) ,$$

laufen also die gleiche Strecke bzw. Spur rückwärts ab. Dann gilt folglich

$$\int_{\gamma^{-1}} f dz = - \int_{\gamma} f dz .$$

Wie man erkennen kann, notieren wir die Zusammensetzung von Wegen in einer multiplikativen Schreibweise, daher γ^{-1} statt $-\gamma$.

Des Weiteren definieren wir die Hintereinanderschaltung von Integrationswegen $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ als den **zusammengesetzten Weg**

$$\gamma_1\gamma_2 : [a, c] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & : t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) & : t \in [b, c] \end{cases} .$$

Wegen der Zerlegbarkeit $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$ der Integrationsgrenzen eines Integrals gilt dann bei der Integration über diesen Weg

$$\int_{\gamma_1\gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz ,$$

da sich die Integrationsgrenzen des Integrals über die konkreten Parametrisierungen zerlegen lassen.

2.2. Stammfunktionen

2.2.1. Der verallgemeinerte Hauptsatz

Sei nun $U \subset \mathbb{C}$ offen, $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und die Ableitung F' stetig sowie $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ ein Integrationsweg. Durch $g(t) := F(\gamma(t))$ sei die Abbildung $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ definiert. Dann gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t) dt \quad \text{mit} \quad g'(t) = F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) ,$$

und damit folgt dann

$$g(b) - g(a) \stackrel{\text{def}}{=} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = \int_a^b F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} F'(z) dz .$$

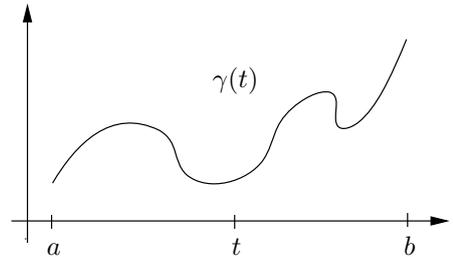


Abbildung 2.2.: Funktionsdefinierter Integrationsweg.

Kurz gesagt hängt der **Wert eines Kurvenintegrals** entlang eines Weges durch das Holomorphiegebiet einer Funktion nur vom **Wert am Start- und Endpunkt** ab.² Ist insbesondere γ ein **geschlossener Weg**, also $\gamma(a) = \gamma(b)$, so folgt

$$\oint_{\gamma} F'(z) dz = 0 .$$

Beispiel: Wegen $\frac{d}{dz} \frac{z^{n+1}}{n+1} = z^n$ für $n \neq -1$ folgt

$$\int_{\gamma} z^n dz = \frac{1}{n+1} (\gamma(b)^{n+1} - \gamma(a)^{n+1}) .$$

Wir wollen diese letzte Erkenntnis nun verallgemeinern, denn die letzten Ausführungen liefern uns eine verallgemeinerte Version des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung für Kurvenintegrale in der komplexen Ebene. Dazu führen wir den Begriff der Stammfunktion ein, den man bereits aus der reellen Analysis kennt, wo er aber nicht näher untersucht wurde.

2.2.2. Stammfunktionen und ihre Eigenschaften

Kennt man die Stammfunktion einer zu integrierenden Funktion, so lässt sich ein Kurvenintegral leicht berechnen. Zunächst aber benötigen wir wieder ein paar Definitionen.

Definition 30: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Eine Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **Stammfunktion** von f , wenn F holomorph und die Ableitung $F' = f$ ist.

Definition 31: Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heißt **konvex**, wenn für alle $w, z \in U$ gilt, dass $(wt + (1-t)z) \in U$ für alle $t \in [0, 1]$ ist.

Bei konvexen Mengen lassen sich also alle Punkte durch eine gerade Strecke miteinander verbinden, die vollständig in der Menge liegt. Insbesondere sind **Dreiecke** konvexe Mengen, und dies werden wir sofort im nächsten Satz ausnutzen.

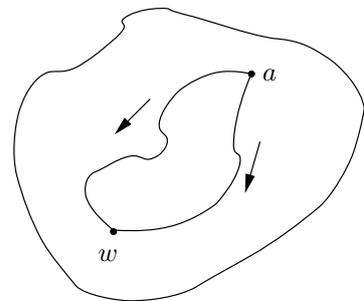
Satz 32: Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene, konvexe Teilmenge und die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

1. Die Funktion f hat eine Stammfunktion.
2. Für alle abgeschlossenen Dreiecke $\Delta \subset U$ gilt $\oint_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$, vgl. Abbildung ??.

Wir können die Aussage dieses Satzes nun von der Dreiecksform wegbringen, und so im folgenden Satz ein wenig verallgemeinern.

Satz 33: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

1. Die Funktion f hat eine Stammfunktion.
2. Für alle geschlossenen Integrationswege gilt $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$.



²Man beachte, dass der Integrationsweg vollständig im Holomorphiegebiet F liegen muss, denn sonst lassen sich schnell Gegenbeispiele finden.

2.2.3. Existenz von Stammfunktionen

Nachdem wir ein paar nützliche Äquivalenzaussagen für die Existenz von Stammfunktionen formuliert haben, werden wir nun die Existenz von Stammfunktionen mit dem folgenden Satz beweisen.

Satz 34 (Goursat): Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\Delta \subset U$ ein abgeschlossenes Dreieck. Dann gilt $\oint_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$.

Bemerkung: Das folgt bereits aus dem Satz von Green³ falls die Ableitung f' stetig ist.

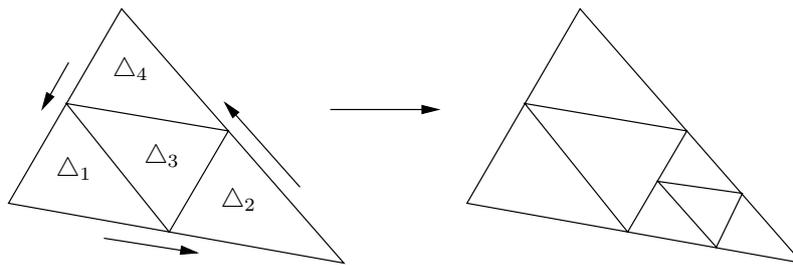


Abbildung 2.3.: Zerlegung des Dreiecks im Beweis des Satzes von Goursat.

Eine sehr einfache - aber überaus nützliche - Folgerung aus dem Satz von Goursat lautet:

Korollar 35: Jede holomorphe Funktion auf einer offenen, konvexen Teilmenge von \mathbb{C} besitzt eine Stammfunktion. □

Beispiel: Wir betrachten noch einmal die Funktion $f(z) := \frac{1}{z}$ für $z \neq 0$, dann gilt

$$\oint_{|z|=r} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0,$$

also besitzt f keine Stammfunktion in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wir werden den komplexen Logarithmus später allerdings genau untersuchen und feststellen, dass er zumindest in Teilen der komplexen Ebene eine Stammfunktion für $z \mapsto \frac{1}{z}$ liefert.

2.3. Homotopieinvarianz des Integrals

Wir werden nun ein bereits sporadisch beobachtetes Ergebnis der vorigen Abschnitt genauer untersuchen, nämlich die Unabhängigkeit des Integralwegs von der konkreten Form des Integrationswegs. Mit anderen Worten zeigen wir also, dass zwei zueinander homotope Integrationswege mit nur wenigen Forderungen denselben Integralwert liefern.

³Der Satz von Green ist der ein- bzw. zweidimensionale Spezialfall des allgemeinen Satzes von Stokes. In der Analysis III wurde er wie folgt formuliert:

Satz (Green): Sei C eine nichtleere, kompakte, zusammenhängende 1-Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 und W der Abschluß der beschränkten Komponente von $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Außerdem sei C als Rand von W orientiert und $f, g : W \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Dann gilt

$$\oint_C f dx + g dy = \iint_W \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy.$$

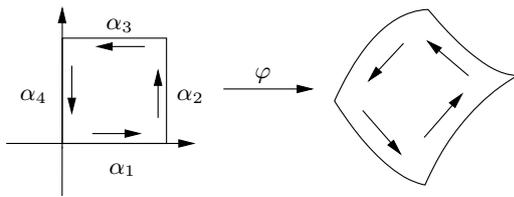


Abbildung 2.4.: Darstellung der Quadratparametrisierung und der Abbildung φ .

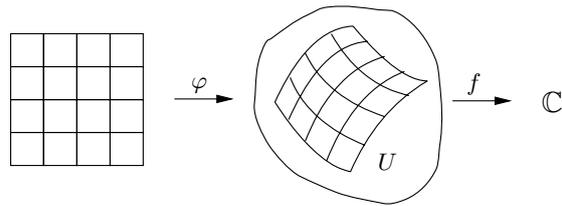


Abbildung 2.5.: Zerlegung des Quadrats in Teilquadrate und Verkettung mit φ und f .

Satz 36: Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und die Abbildung $\varphi : K := [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ stetig. Der Rand des Quadrats $[0, 1]^2$ sei durch

$$t \mapsto \begin{cases} \alpha_1(t) := (t, 0) & : 0 \leq t \leq 1 \\ \alpha_2(t) := (1, t - 1) & : 1 \leq t \leq 2 \\ \alpha_3(t) := (3 - t, 1) & : 2 \leq t \leq 3 \\ \alpha_4(t) := (0, 4 - t) & : 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

parametrisiert, vgl. Abbildung 2.4. Wir setzen $\gamma_j := \varphi \circ \alpha_j$, und bezeichnen die Zusammensetzung der Wegstücke mit $\gamma := \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 : [0, 4] \rightarrow U$. Falls nun γ ein Integrationsweg ist, so gilt $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Beweisidee: Man kann den Satz auf mehrere Arten beweisen:

1. Wir zerteilen das Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ in kleine Teilquadrate, die von φ auf U abgebildet werden, und auf die wir dann f anwenden, vgl. dazu auch Abbildung 2.5. Dann lauten die Beweisschritte:
 - Das Integral von f über jedes kleine Quadrat ist Null.
 - Die Summe dieser Quadrate ist dann ebenfalls gleich Null.
 - Die Summe entspricht $\oint_{\gamma} f(z) dz$.

Problem: φ ist nur stetig, aber nicht unbedingt differenzierbar, sodass wir unsere vorigen Sätze nicht anwenden können.

2. Wir nähern stetige Wege durch Polynome beliebig genau an, sodass sie glatt werden (vgl. Abbildung 2.6).

Um nun die erwähnten Homotopieeigenschaften des Integrals zu untersuchen, definieren wir zunächst einmal den zugehörigen Begriff.

Definition 37: Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow U$ zwei geschlossene Wege in U . Beide Wege heißen **homotop**, im Zeichen $\gamma_0 \sim \gamma_1$, falls es eine stetige Abbildung

$$\varphi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U \quad \text{mit} \quad \varphi(s, 0) = \gamma_0(s) \quad \text{und} \quad \varphi(s, 1) = \gamma_1(s)$$

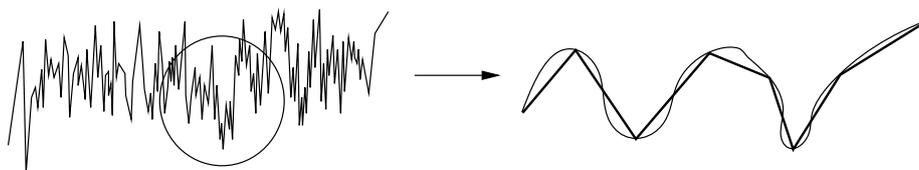


Abbildung 2.6.: Approximation stetiger Wege durch differenzierbare Polynome.

für $a \leq s \leq b$ gibt und $\varphi(a, t) = \varphi(b, t)$ stets für alle $0 \leq t \leq 1$ erfüllt ist.

Anschaulich ausgedrückt lassen sich also zwei homotope Wege wie mit einem „Drehregler“ stetig ineinander überführen.

Bemerkung: Für jedes $t \in [0, 1]$ ist $s \mapsto \varphi(s, t)$ mit der oben verwendeten Abbildung φ ein geschlossener Weg und $\{\varphi_t\}_{t \in [0, 1]}$ eine einparametrische Familie von geschlossenen Wegen (vgl. Abbildung 2.7).

Der entscheidende Homotopiesatz dieses Abschnitts ist dank unserer Vorbereitungen nun sehr schnell bewiesen.

Satz 38: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow U$ zwei geschlossene Integrationswege und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sind die Wege $\gamma_1 \sim \gamma_2$, so gilt

$$\oint_{\gamma_0} f(z) dz = \oint_{\gamma_1} f(z) dz .$$

Definition 39: Ein Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ heißt **einfach zusammenhängend**, falls jeder geschlossene Weg homotop in U zu einem konstanten Weg ist.

Anschaulich könnte man auch einfach sagen, dass ein einfach zusammenhängendes Gebiet „lochfrei“ ist, d.h. wir können jeden beliebigen geschlossenen Weg auf einen Punkt zusammenziehen.

Definition 40: Eine Menge $U \subset \mathbb{C}$ heißt **sternförmig**, falls es einen Punkt $z_0 \in U$ gibt, sodass $[(1-t)z + tz_0] \in U$ für alle $z \in U$ und $0 \leq t \leq 1$ gilt.

In einer sternförmigen Menge U sind also die Verbindungsstrecken zwischen dem Bezugspunkt z_0 und jedem anderen Punkt $z \in U$ vollständig in der Menge enthalten, was auch die beiden folgenden Beispiele zeigen:

Beispiel: 1. Konvexe Mengen sind in jedem Punkt sternförmig.

2. $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ ist mit einem Bezugspunkt $z_0 \in]0, \infty[$ sternförmig.

Satz 41: Jede offene sternförmige Menge U ist einfach zusammenhängend.

Mit den vorigen Sätzen folgt damit trivialerweise direkt:

Satz 42: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ für alle geschlossenen Integrationswege γ in U , also hat f eine Stammfunktion in U . \square

2.4. Der komplexe Logarithmus

In der reellen Analysis ist es oft leicht das Definitionsgebiet einer Umkehrfunktion anzugeben - anders als in der komplexen Analysis. Dieses Phänomen, auf das wir aber an dieser Stelle noch nicht näher eingehen möchten, führt letztendlich zur Theorie der Riemannschen Flächen, auf die wir im zweiten Teil näher eingehen werden. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns nun ausschließlich mit dem Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

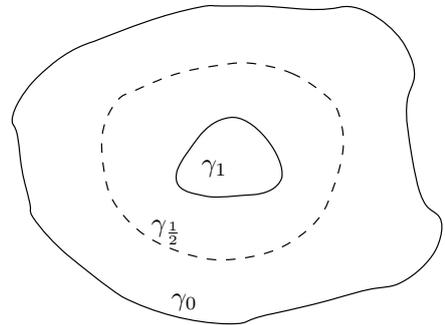


Abbildung 2.7.: Mehrere Wege γ_t aus $\{\gamma_t\}_{t \in [0, 1]}$

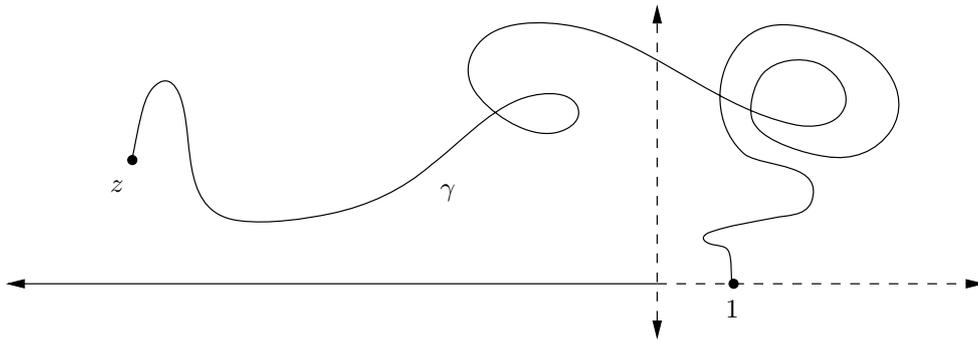


Abbildung 2.8.: Die Definition des komplexen Logarithmus über einen beliebigen Weg.

2.4.1. Konstruktion und Definition des Hauptzweigs

Mit der gerade bewiesenen Existenz von Stammfunktionen konstruieren wir nun den komplexen Logarithmus im folgenden Korollar.

Korollar 43: Es existiert genau eine holomorphe Funktion $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\text{Log}(1) = 0$ und $\text{Log}'(z) = \frac{1}{z}$, die durch

$$\text{Log}(z) := \int_{[1,z]} \frac{1}{z} dz$$

definiert ist. Diese Funktion $\text{Log}(z)$ heißt **Hauptzweig des Logarithmus**.⁴ □

Von dem so definierten Hauptzweig des Logarithmus erwarten wir natürlich dieselben Umkehrigenschaften im Bezug zur Exponentialfunktion, die auch den reellen Logarithmus kennzeichnen.

Satz 44: Es gilt $e^{\text{Log} z} = z$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, d.h. der Hauptzweig des Logarithmus $\text{Log}(z)$ ist im Definitionsbereich die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

Korollar 45: Es gilt $\text{Log}(re^{i\theta}) = \log(r) + i\theta$ für alle $r > 0$ und $-\pi < \theta < \pi$.

Definition 46: Wir definieren den **komplexen Logarithmus** analog zum Korollar 43 als $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\text{Log}(z) := \int_{\gamma} \frac{1}{w} dw = \int_{[1,z]} \frac{1}{w} dw ,$$

wobei nach dem vorigen Satz $e^{\text{Log} z} = z$ gilt. Ab jetzt sei $\log(x)$ der bekannte reelle Logarithmus.

Wir können den Hauptzweig des komplexen Logarithmus $\text{Log}(z)$ durch den reellen Logarithmus $\log(x)$ und einen zusätzlichen rein imaginären Teil darstellen - dies haben wir bereits aus der Umkehrigkeit in Korollar 45 gezeigt. Mit der obigen Definition des komplexen Logarithmus ist dies aber auch direkt aus der Definition möglich, daher noch einmal:

Satz 47: Es gilt $\text{Log}(re^{i\theta}) = \log(r) + i\theta$ für alle $r > 0$ und $-\pi < \theta < \pi$.

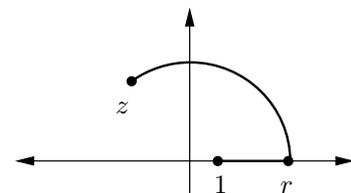


Abbildung 2.9.: Wegzerlegung des Beweises.

⁴Man beachte den groß geschriebenen Anfangsbuchstaben des Hauptzweigs des Logarithmus. Wir werden im Weiteren mit $\log(x)$ den **reellen Logarithmus**, mit $\text{Log}(z)$ den **Hauptzweig** des komplexen Logarithmus und später mit $\text{Lg}(z)$ **weitere Zweige** des komplexen Logarithmus bezeichnen.

2.4.2. Zweige des Logarithmus

Die Frage ist nun, ob sich der so definierte komplexe Logarithmus auch in den übrigen Eigenschaften genauso wie der reelle verhält. Was ist etwa mit $\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2)$? Bei $z_1 = i = z_2$, also $z_1 z_2 = -1$, ist $\text{Log}(-1)$ beispielsweise nicht definiert.

Satz 48: Für $j = 1, 2$ sei $z_j := r_j e^{i\theta_j}$ mit $r_j > 0$ und $-\pi < \theta_j < \pi$. Dann gilt $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$. Für $\theta_1 + \theta_2 = \pm\pi$ ist $\text{Log}(z_1 z_2)$ nicht definiert. Ansonsten gilt

$$\text{Log}(z_1 z_2) - \text{Log}(z_1) - \text{Log}(z_2) = \begin{cases} 2\pi i & : -2\pi < \theta_1 + \theta_2 < -\pi \\ 0 & : -\pi < \theta_1 + \theta_2 < \pi \\ -2\pi i & : \pi < \theta_1 + \theta_2 < 2\pi \end{cases} .$$

Kommen wir nun zu den bereits erwähnten Zweigen eines Logarithmus, die wir einfach allgemein als Funktionen definieren, die innerhalb ihres Definitionsbereiches die komplexe Exponentialfunktion umkehren.

Definition 49: Sei $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Gebiet. Eine holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $e^{f(z)} = z$ für $z \in G$ heißt **Zweig des Logarithmus** auf G .

Für einen solchen Zweig des Logarithmus f gilt dann für die Ableitung innerhalb des Definitionsbereiches wieder

$$1 = \frac{\partial}{\partial z} z = \frac{\partial}{\partial z} e^{f(z)} = f'(z) e^{f(z)} \iff f'(z) = \frac{1}{z} .$$

Der zuvor definierte Hauptzweig eines Logarithmus ist also nichts anderes als ein besonderer Zweig, den wir auf sehr natürliche Weise gemäß der obigen Definition erhalten.

Man kann nun allerdings zeigen, dass wir für einen Großteil der Gebiete stets einen Zweig des Logarithmus, also eine lokale Logarithmusfunktion definieren können.

Satz 50: Auf jedem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es einen Zweig des Logarithmus.

Wir können den Satz allgemeiner formulieren: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und ohne Nullstellen. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $e^{g(z)} = f(z)$ für alle $z \in G$.

Von nun an bezeichnen wir einen beliebigen Zweig des komplexen Logarithmus mit $\text{Lg}(z)$. Mit der Exponentialfunktion und dem nun wohldefinierten Logarithmus können wir auch komplexe Potenzen, also Potenzen der Form „komplex hoch komplex“ definieren.

Definition 51: Sei $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Gebiet und Lg ein Zweig des Logarithmus auf G . Wir definieren

$$a^b := e^{b \text{Lg}(a)} \quad \text{für alle } b \in \mathbb{C} \text{ und } a \in G .$$

Die Potenz-Funktion $G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto z^b$ heißt **Zweig der b -ten Potenz** auf G .

Natürlich verhält sich auch die komplexe Potenz genau wie die reelle, d.h. es gilt

$$\frac{\partial}{\partial z} z^b = \frac{\partial}{\partial z} e^{b \text{Lg}(z)} = b \cdot \frac{1}{z} e^{b \text{Lg}(z)} = b z^{b-1} .$$

3. Holomorphe Funktionen

In diesem Kapitel werden wir uns nun hauptsächlich mit den besonderen Eigenschaften holomorpher Funktionen beschäftigen. Der zentrale Satz ist dabei die Cauchysche Integralformel, die es erlaubt, den Wert einer Funktion durch ein Integral über den Rand eines umliegenden Gebiets auszudrücken - zunächst allerdings nur in der Formulierung für konvexe Gebiete.

Digression: Differenzierung unter dem Integral

Zunächst aber werden wir noch eine kurze Abhandlung über die Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation vornehmen. Dazu betrachten wir den folgenden Satz aus der reellen Analysis II.

Satz 52: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und die Funktion $f : [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann gelten die folgenden beiden Eigenschaften:

1. Die Abbildung $U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $x \mapsto \int_a^b f(s, x) ds$ ist eine stetige Funktion auf U .
2. Falls die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ für $1 \leq j \leq n$ in $[a, b] \times U$ existiert und stetig ist, so gilt die **Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation** in der Form

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_a^b f(s, x) ds = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(s, x) ds .$$

3.1. Die Cauchysche Integralformel und Folgerungen

3.1.1. Beweis der Cauchy-Formel

Nach der kurzen Erinnerung an den vorigen Vertauschungssatz werden wir nun die Cauchysche Integralformel für kreisförmige Gebiete beweisen, später werden wir diesen Satz dann auch noch verallgemeinern.

Zuerst zeigen wir in einem kleinen Hilfssatz, dass kreisförmige Wege mit dem gleichen Umlaufsinn homotop zueinander sind, d.h. stetig ineinander deformierbar.

Lemma 53: Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| \in]0, 1[$ und $r > 0$, sodass $|a| + r < 1$ ist (vgl. Abbildung 3.1). Für $s, t \in [0, 2\pi]$ sei $\alpha(s) := e^{is}$ und analog $\beta(t) := a + re^{it}$ definiert. Dann gilt $\alpha \sim \beta$ in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Kommen wir nun endlich zum Beweis der Cauchy-Formel.

Satz 54 (Cauchy-Integralformel): Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ ein fester Punkt und der Kreisradius $R > 0$ so gewählt, dass $\overline{D_R(z_0)} \subset U$ liegt

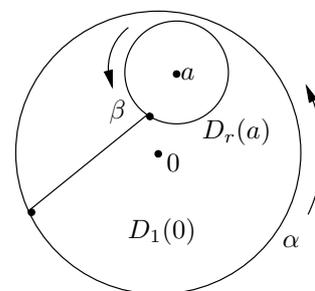


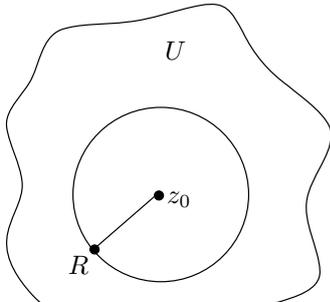
Abbildung 3.1.: Zwei Wege.

3. Holomorphe Funktionen

(vgl. Abbildung 3.2). Dann gilt für alle Punkte $z \in D := D_R(z_0)$ des Kreises die Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(w)}{w - z} dw .$$

Eine überaus wichtige direkte Folgerung aus der Cauchy-Formel lautet wie folgt.



Satz 55: Jede holomorphe Funktion ist **beliebig oft komplex differenzierbar**. Falls f holomorph in einer Umgebung einer abgeschlossenen Kreisscheibe \bar{D} ist, so gilt für alle $z \in D$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw .$$

3.1.2. Taylorreihen-Entwicklung

Abbildung 3.2: Die Cauchy-Voraussetzungen erinnern wir uns, dass für einen beliebigen Integrationsweg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : \text{Sp}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $n \in \mathbb{N}$ aus der gleichmäßigen Konvergenz von $f_n \rightarrow f$ die Vertauschbarkeit von Grenzwert und Integral folgt (vgl. Satz 18 auf Seite 8), d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{\gamma} f_n(z) dz = \oint_{\gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \oint_{\gamma} f(z) dz .$$

Dies folgt unter Einsatz von γ direkt aus dem entsprechenden Satz aus der reellen Analysis, denn $(f_n \circ \gamma) \cdot \gamma' \rightarrow (f \circ \gamma) \cdot \gamma'$ konvergiert gleichmäßig auf $[a, b]$.

Damit beweisen wir nun den Satz über die Taylor-Entwicklung einer Funktion.

Satz 56 (Taylorreihe): Sei $f : D_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit dem Kreisradius $R > 0$, durch welche die Koeffizienten $a_n := \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$ definiert sind. Dann gilt für $|z - z_0| < R$ die Taylorreihen-Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

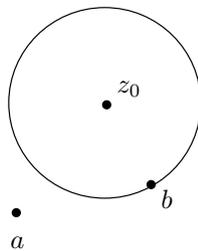


Abbildung 3.3.: Die zwei Pole a und b der Funktion mit dem Konvergenzkreis um den Entwicklungspunkt z_0 .

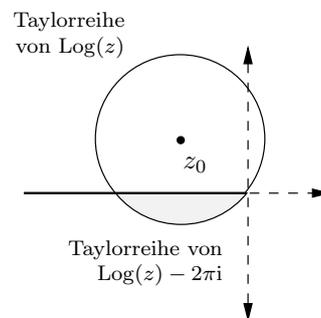


Abbildung 3.4.: Konvergenzkreis der Taylorreihen-Entwicklung des Logarithmus.

Beispiel: 1. Betrachte die Funktion $f(z) := (z - a)^{-1}(z - b)^{-1}$ mit $a \neq b$. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ die Taylorreihe von f in z_0 und R ihr Konvergenzradius, dann wollen wir die Koeffizienten c_n berechnen. Außerdem sei $r := \min(|z_0 - a|, |z_0 - b|)$ der minimale Abstand von z_0 zu einem Pol zur Funktion f (vgl. Abbildung 3.3). Dann ist f in $D_r(z_0)$ holomorph, so ist $R \geq r$, aber andererseits gilt

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty \\ \lim_{z \rightarrow b} |f(z)| = \infty \end{array} \right\} \implies R = r = \infty .$$

Die Berechnung der Taylor-Koeffizienten erfolgt anhand der Partialbruchzerlegung

$$f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(z - a)(z - b)} = \frac{1}{a - b} \left(\frac{1}{z - a} - \frac{1}{z - b} \right)$$

der Funktion. Für die n -te Ableitung von f gilt dann

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n \frac{n!}{a - b} \left(\frac{1}{(z - a)^{n+1}} - \frac{1}{(z - b)^{n+1}} \right),$$

und damit für die Koeffizienten der Reihendarstellung von f

$$c_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = (-1)^n \frac{1}{a - b} \left(\frac{1}{(z_0 - a)^{n+1}} - \frac{1}{(z_0 - b)^{n+1}} \right).$$

2. Betrachte $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\text{Log}'(z) = \frac{1}{z}$. Die Taylorreihen von Log und Log' in z_0 haben denselben Konvergenzradius R , also $R = |z_0|$, denn am Nullpunkt hat der Logarithmus immer einen Pol - egal welchen Zweig wir wählen (vgl. Abbildung 3.4). Für $z_0 = 1$ nimmt die Reihe die Form

$$\text{Log}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z - 1)^n$$

mit dem Konvergenzradius $R = 1$ an.

3.2. Folgerungen und die Cauchysche Ungleichung

Für die weitere Untersuchung holomorpher Funktionen sind ein paar einfache Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel notwendig, insbesondere die Cauchysche Ungleichung. Außerdem werden wir den Identitätssatz und Satz über die Gebietstreue beweisen, nach dem die Bilder von Gebieten unter nichttrivialen holomorphen Funktionen wieder Gebiete sind.

3.2.1. Nullstellen holomorpher Funktionen

Zunächst aber benötigen wir wieder einen kleinen Hilfssatz, mit dem wir dann den Identitätssatz beweisen werden.

Lemma 57: Sei die Funktion $f \not\equiv 0$ holomorph in $D_R(0)$ für $R > 0$. Dann gibt es ein $r \in]0, R]$, sodass $f(z) \neq 0$ für $0 < |z| < r$ gilt.

Eine Funktion, die nicht mit der Nullfunktion identisch ist, hat also innerhalb einer punktierten Kreisscheibe keine Nullstellen - insbesondere gibt es also um jede Nullstelle eine Nullstellenfreie punktierte Kreisscheibe. Mit den folgenden Definitionen können wir dies auch so ausdrücken, dass bei einer holomorphen Funktion die Menge der Nullstellen diskret ist.

Definition 58: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. A heißt **diskret**, wenn für alle $a \in A$ ein $r > 0$ existiert, sodass $D_r(a) \cap A = \{a\}$ gilt, d.h. man kann um jeden Punkt der Menge einen offenen Ball legen, der nur den Punkt a der Menge A enthält.

Definition 59: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Der Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ ist ein **Häufungspunkt**, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$,
2. Für alle $r > 0$ gilt $D_r(a) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$.

Ist also A diskret, so enthält A nach dieser Definition keine Anhäufungspunkte. Die Umkehrung gilt ebenfalls. Ein paar Beispiele sollen die Begriffe erläutern:

Beispiel: 1. Die Menge $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ist diskret.

2. Die Menge $A := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ hat einen Häufungspunkt bei Null, da für den Abschluß $\overline{A} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ gilt.

Nun können wir einen weiteren nützlichen Satz für holomorphe Funktionen beweisen.

Satz 60 (Identitätssatz): Sei die Funktion f holomorph auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Dann sind die folgenden drei Aussage äquivalent:¹

1. $f \equiv 0$, d.h. f ist mit der Nullfunktion identisch.
2. Das Urbild $f^{-1}(0)$ der Null enthält Häufungspunkte.
3. Es existiert ein $z_0 \in G$, sodass $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \geq 0$ gilt.²

Setzt man dieses Ergebnis nun mit der Aussage des letzten Lemmas zusammen, wonach eine holomorphe Funktion, die nicht identisch der Nullfunktion ist, nur diskrete Nullstellen hat, so erhalten wir für holomorphe Funktionen die Äquivalenz

diskrete Nullstellen \iff nicht identisch der Nullfunktion .

3.2.2. Cauchy-Ungleichung und Gebietstreue

Nach dem Identitätssatz kommen wir nun zur erwähnten Cauchy-Ungleichung, die eine einfache Abschätzung der Taylor-Koeffizienten einer Funktion durch das Verhalten der Funktion auf einem kleinen Kreis um den Entwicklungspunkt erlaubt.

¹Der Name „Identitätssatz“ wird bei einer leicht abgewandelten Fassung des Satzes deutlicher:

Satz (Identitätssatz): Die folgenden drei Aussagen sind für zwei auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktion f und g äquivalent:

1. $f \equiv g$, d.h. die beiden Funktionen sind identisch.
2. Es gibt eine nichtdiskrete Menge $I \subset G$ mit $f(z) = g(z)$ für alle $z \in I$.
3. Es gibt ein $z_0 \in G$ mit $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zum Beweis wende man die ursprüngliche Formulierung des Identitätssatzes auf die Differenz $f - g$ an.

²Einen solchen Fall werden wir später eine **Nullstelle der Ordnung** ∞ nennen.

Satz 61 (Cauchy-Ungleichung): Sei die Funktion f holomorph in einer Umgebung von $\overline{D_r(z_0)}$. Dann gilt die Abschätzung

$$\underbrace{\left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \right|}_{\substack{n\text{-ter Koeffizient} \\ \text{der Taylorreihe}}} \leq r^{-n} \cdot \underbrace{\max_{|z-z_0|=r} |f(z)|}_{\substack{\text{Größter Wert auf} \\ \text{dem Kreis } S_r(z_0)}} .$$

Um nun mithilfe des Identitätssatzes den Satz von der Gebietstreue zu beweisen, zeigen wir zuerst mit der eben bewiesenen Cauchy-Ungleichung einen kleinen Hilfssatz, um den eigentlichen Beweis zu verkürzen.

Lemma 62: Die Funktion f sei in einer Umgebung von $\overline{D_r(z_0)}$ holomorph. Falls

$$|f(z_0)| < \min_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$

ist, so hat f eine Nullstelle in der Kreisscheibe $D_r(z_0)$.

Satz 63 (Gebietstreue): Sei f eine nicht-konstante holomorphe Funktion auf dem Gebiet G . Dann ist das Bild $f(G)$ wieder ein Gebiet.

Auf Seite 63 werden wir später noch weitere Eigenschaften von Gebieten beweisen, das Schlüsselglied ist der Riemannsche Abbildungssatz. Nach ihm können zwei beliebige Gebiete sogar biholomorph (!) aufeinander abgebildet werden.

Der Satz von der Gebietstreue hat aber auch wichtige Konsequenzen, denn holomorphe Funktionen mit konstantem Real- oder Imaginärteil sowie konstantem Betrag sind selbst wieder konstant, da die Bildmenge eines Gebiets nicht offen ist.

3.3. Minimums-/Maximums-Prinzip und Mittelwerteigenschaft

3.3.1. Maximums- und Minimums-Prinzip für holomorphe Funktionen

Aus dem Satz von der Gebietstreue können wir die folgende Eigenschaft holomorpher Funktionen folgern.

Satz 64 (Maximums-Prinzip): Es sei f eine auf dem Gebiet G holomorphe Funktion. Wenn $|f|$ in einem Punkt $z_0 \in G$ ein lokales Maximum hat, so ist f konstant in G . Falls G beschränkt ist und f auf \overline{G} eine stetige Fortsetzung besitzt, dann nimmt $|f|$ das Maximum auf dem Rand ∂G des Gebiets an, d.h. für alle $z \in G$ gilt

$$|f(z)| \leq \max_{\xi \in \partial G} |f(\xi)| .$$

Dieses Ergebnis ist im Vergleich zur reellen Analysis sicherlich sehr unerwartet. Beschränkte holomorphe Funktionen nehmen also ihre *Maxima stets auf dem Rand des Holomorphiegebiets* an. Mit ein paar Modifikationen können wir diese Aussage auch für Minima formulieren.

Satz 65 (Minimums-Prinzip): Sei f eine holomorphe Funktion auf dem Gebiet G , dann gelten die folgenden beiden Aussagen:

1. Hat $|f|$ ein lokales Minimum in $z_0 \in G$, so ist $f(z_0) = 0$ oder f ist konstant.
2. Lässt sich f stetig auf \overline{G} fortsetzen und ist das Gebiet G beschränkt, so hat f Nullstellen in G oder $|f|$ nimmt das Minimum auf ∂G an, also $|f(z)| \geq \min_{\xi \in \partial G} |f(\xi)|$.

3.3.2. Verallgemeinertes Maximums-Prinzip für stetige Funktionen

Wir wollen nun das Maximums-Prinzip verallgemeinern, sodass wir einige der Bedingungen von Satz 64 nicht mehr benötigen. Es sei daran erinnert, dass nach dem Cauchy-Integralsatz für eine holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt .$$

für einen kreisförmigen Weg γ_r um z mit dem Radius r gilt.

Definition 66: Eine stetige³ Funktion f auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ hat die **Mittelwert-eigenschaft**, wenn es zu jedem $z_0 \in U$ ein $R > 0$ mit $\overline{D_R(z_0)} \subset U$ gibt, sodass für $0 < r < R$ gilt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt =: \mu_r(f; z_0) .$$

Die Bezeichnung „Mittelwert-eigenschaft“ kommt von der besonderen Form des Integrals, dass einmal im Kreis um den eigentlichen Punkt integriert, und somit den Mittelwert des Funktionswerts entlang des Kreises angibt. Wir illustrieren den Begriff kurz.

Beispiel: 1. Jede holomorphe Funktion auf einem Gebiet hat die Mittelwert-eigenschaft.

2. Haben f und g die Mittelwert-eigenschaft, so hat auch die Linearkombination $\alpha f + \beta g$ wieder die Mittelwert-eigenschaft.

3. Hat f die Mittelwert-eigenschaft, so haben auch $\Re(f)$, $\Im(f)$ und \bar{f} die Mittelwert-eigenschaft.

Mit der neuen Mittelwert-eigenschaft einer Funktion verallgemeinern wir nun das bereits in Satz 64 gezeigte Maximums-Prinzip auf stetige Funktionen.

Satz 67 (Allgemeines Maximums-Prinzip): Es sei f eine auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ stetige Funktion mit der Mittelwert-eigenschaft. Besitzt $|f|$ in $z_0 \in U$ ein lokales Maximum, dann ist f in einer Umgebung von z_0 konstant.

3.4. Ganze Funktionen und Polynome

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels behandeln wir nun ganze und transzendente Funktionen. Wir werden nebenbei einen sehr knappen und eleganten Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra finden. Außerdem zeigen wir zwei Kriterien, mit denen sich schnell herausfinden lässt, ob eine holomorphe Funktion ein Polynom ist.

Zunächst wieder die notwendigen Definitionen der Grundbegriffe.

Definition 68: Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **ganze Funktion**, das Holomorphiegebiet sei also ganz \mathbb{C} .

Definition 69: Eine ganze Funktion, die darüber hinaus kein Polynom ist, heißt **ganze transzendente Funktion**.

Aus der Definition folgt, dass die Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ einer ganzen Funktion um den Entwicklungspunkt z_0 für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, sie stellt die Funktion also vollständig dar.

³Man beachte also, dass die Mittelwert-eigenschaft von einer (nur) stetigen Funktion zusätzlich eine Eigenschaft fordert, die wir ursprünglich aus der Holomorphie einer Funktion gefolgert haben.

3.4.1. Eigenschaften und Abschätzung von Polynomen

Im nächsten Satz werden wir nun ein paar einfache Abschätzungen von komplexen Polynomen aufzählen. Auf Seite 6 haben wir in Satz 8 bereits gezeigt, dass komplexe Polynome von der gleichen äußeren Form wie reelle Polynome sind.

Satz 70: Sei $p(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ein komplexes Polynom vom Grad n , wobei der oberste Koeffizient $a_n \neq 0$ sei. Dann gelten die folgenden beiden Abschätzungen:

1. Für alle $R > 0$ existiert eine Konstante $M_1(R) > 0$ mit $|p(z)| \leq M_1 |z|^n$ für $|z| \geq R$.
2. Es existiert ein Konstante $M_2 > 0$ und ein $R > 0$ mit $|p(z)| \geq M_2 |z|^n$ für $|z| \geq R$.

Der nächste Satz liefert, dass wir anhand des Wachstumsverhaltens einer Funktion entscheiden können, ob es sich bei der Funktion um ein Polynom handelt.

Satz 71: Sei f eine ganze Funktion, $n \in \mathbb{N}_0$ und $R, M > 0$, sodass $|f(z)| \leq M |z|^n$ für $|z| \geq R$ gilt. Dann ist f ein Polynom mit Grad kleiner oder gleich n .

Da nur Polynome vom Grad Null, d.h. konstante Funktionen, beschränkt sind, erhält man daraus sofort zwei weitere interessante Folgerungen.

Korollar 72 (Liouville): Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Korollar 73 (Fundamentalsatz der Algebra): Jedes nicht-konstante komplexe Polynom $p(z)$ hat eine Nullstelle.

Korollar 74: Jedes komplexe Polynom $p(z)$ vom Grad n hat die Form $p(z) = c(z - z_1) \cdots (z - z_n)$ für passende Konstanten $c, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

3.4.2. Transzendente Funktionen

In der Fußnote von Seite 24 haben wir bereits kurz den folgenden Begriff erwähnt, der wir nun definieren.

Definition 75: Eine holomorphe Funktion f hat in z_0 eine **Nullstelle der Ordnung** $k \geq 1$, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:⁴

1. Es gilt $0 = f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0)$, aber $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.
2. Die Taylorreihe von f um z_0 lautet $f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ mit $a_k \neq 0$.
3. Es gilt $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ mit g holomorph in einer Umgebung von z_0 und $g(z_0) \neq 0$.

Beispiel: Betrachte die Abbildung $z \mapsto \cos z - 1$, dann ist $z_0 = 0$ eine Nullstelle 2. Ordnung, denn es gilt für die ersten beiden Ableitungen

$$\cos'(0) = -\sin(0) = 0 \quad \text{und} \quad \cos''(0) = -\cos(0) = -1 \neq 0.$$

Es soll an dieser Stelle noch einmal an die Definition einer dichten Menge erinnert werden, wobei wir nur dichte Mengen innerhalb der komplexen Ebene betrachten.

⁴Die Äquivalenz der drei Bedingungen ist trivial durch „1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 1.“ zu zeigen, für den Teil „2. \Rightarrow 3.“ verwende $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{k-n} z^n$.

3. Holomorphe Funktionen

Definition 76: Eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ ist genau dann **dicht in** \mathbb{C} , wenn für alle offenen nichtleeren Teilmengen $U \subset \mathbb{C}$ der Schnitt $U \cap A \neq \emptyset$ ist.

Satz 77: Sei f eine ganze transzendente Funktion. Dann ist das Bild $f(\mathbb{C} \setminus D_R(0)) \subset \mathbb{C}$ der „gelochten“ komplexen Ebene dicht für alle Kreisradien $R > 0$.⁵

Mit dieser interessanten Eigenschaft ganzer Funktionen können wir ein weiteres Polynom-Kriterium ähnlich zu Satz 71 beweisen, welches im Gegenzug eine Abschätzung des Polynomgrades nach unten hin ermöglicht.

Satz 78: Sei f eine ganze Funktion, $n \in \mathbb{N}_0$ und $R, M > 0$ mit $|f(z)| \geq M|z|^n$ für $|z| \geq R$. Dann ist f ein Polynom mit Grad größer oder gleich n .

Betrachten wir ein zwei Anwendungen der vorigen Sätze.

Beispiel: 1. $f(z) := e^z \neq 0$ gilt für alle $z \in \mathbb{C}$. Sei $w_0 := re^{i\theta}$ mit $r > 0$ und $\theta \in \mathbb{R}$, dann definiere die Folge $z_n := \log r + i(\theta + 2\pi n)$. Dann gilt $f(z_n) = w_0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, aber die Folge divergiert wegen $|z_n| \rightarrow \infty$, während $|f(z_n)|$ beschränkt bleibt. Folglich ist das Bild $f(\mathbb{C} \setminus D_R(0)) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ für alle $R > 0$, vergleiche auch die Fußnote zu Satz 77.

2. $f(z) := \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} - e^{-iz})$. Sei wieder $w_0 \in \mathbb{C}$. Suche ein z mit $\cos z = w_0$, also ein $a := e^{iz}$ mit $a + a^{-1} = 2w_0$, löse also $a^2 + 1 = 2aw_0$. Für diese Gleichung existiert eine Lösung $a \neq 0$, also gibt es wegen der Periodizität der Kosinus-Funktion ein z mit $|z|$ beliebig groß, während $e^{iz} \stackrel{\text{def}}{=} a$ ist, und deswegen $\cos z = w_0$ gilt. Also ist für alle $R > 0$ das Bild $\cos(\mathbb{C} \setminus D_R(0)) = \mathbb{C}$.

⁵Wir können den Satz auch in einer deutlich abgewandelten Weise formulieren:

Satz: Sei f eine ganze transzendente Funktion. Dann gibt es zu jedem $w_0 \in \mathbb{C}$ eine Folge $\{z_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{C} mit $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = \infty$ und $\lim_{m \rightarrow \infty} f(z_m) = w_0$.

4. Isolierte Singularitäten

Viele Funktionen sind mit Ausnahme einzelner Punkte von \mathbb{C} holomorph, sodass ihre Untersuchung wichtig ist. Außerdem liefert das Studium von Funktionen in der Nähe derartiger isolierter Singularitäten viele wichtige Erkenntnisse. Wir werden später das Konzept der Taylorreihe auf Summanden mit negativen Potenzen erweitern und der Residuensatz wird die Berechnung vieler zunächst „unlösbarer“ Integrale ermöglichen.

4.1. Singularitäten

Wir beginnen das Kapitel mit einer genauen Definition des Begriffs „Singularität“.

Definition 79: Falls $U \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in U$ und $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph (in a aber nicht definiert) ist, so heißt der Punkt a **isolierte Singularität** von f . Es gibt drei Untertypen, die wir unterscheiden:

1. Gibt es eine holomorphe Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g|_{U \setminus \{a\}} = f$, so heißt a **hebbare Singularität** von f .
2. Falls $|f(z)| \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow a$ strebt, so heißt a **Pol** von f .
3. Erfüllt a keine der ersten beiden Eigenschaften, so heißt a **wesentliche** oder **schwankende Singularität** von f .

Wir werden später sehen, dass hebbare Singularitäten und Pole relativ problemfrei zu behandeln sind, dafür aber haben die wesentlichen Singularitäten interessantere Eigenschaften. Der Kürze halber definieren wir für die folgenden Abschnitte die Menge

$$D'_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\} = D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$$

als die offene **punktierte Kreisscheibe**, bei der der Mittelpunkt entfernt wird.

Satz 80 (Riemannscher Hebbarkeitssatz): Falls die Funktion $f : D'_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist und $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$ gilt, so ist a eine hebbare Singularität von f .

Beispiel: $f(z) := \frac{e^z - 1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}$, hier ist 0 eine hebbare Singularität, wie man unschwer an der Reihendarstellung erkennen kann.

Satz 81: Sei $f : D'_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und a ein Pol von f . Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion $h : D_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $h(a) \neq 0$ und $f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^n}$ für $z \in D'_r(a)$.

Ein überaus interessantes Ergebnis für die Umgebung einer wesentlichen Singularität liefert der folgende Satz.

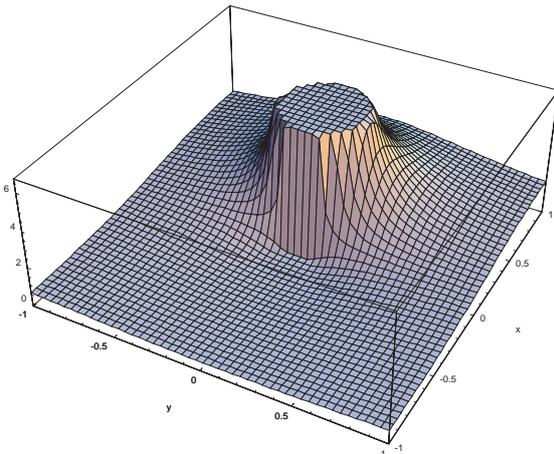


Abbildung 4.1.: Darstellung der wesentlichen Singularität der Funktion $|\exp(\frac{1}{z})|$ bei Null.

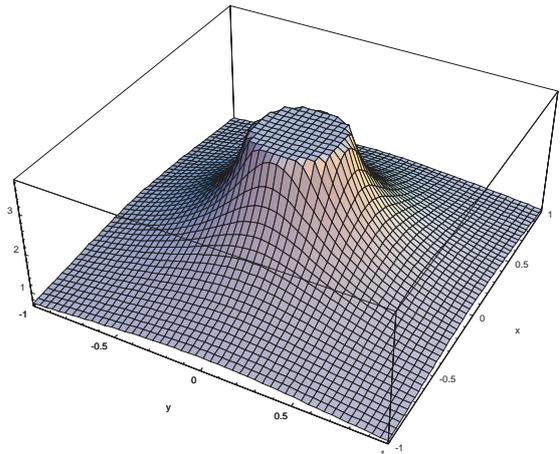


Abbildung 4.2.: Darstellung des Pols der Funktion $|\frac{1}{z}|$ im Nullpunkt.

Satz 82 (Casorati-Weierstraß): Ist a eine wesentliche Singularität von $f : D'_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$, dann ist das Bild $f(D'_\varepsilon(a)) \subset \mathbb{C}$ dicht für alle Radien $\varepsilon \in]0, r]$.¹

4.2. Laurent-Reihen

4.2.1. Zerlegung in Haupt- und Nebenteil

Kommen wir nun zur Theorie der Laurent-Reihen, die einer Verallgemeinerung der Taylorreihen sind. Im Gegensatz zu Taylorreihen sind Laurent-Reihen oft nicht auf einer Kreisscheibe, sondern einem Kreisring definiert.

Definition 84: Für $a \in \mathbb{C}$ und die Radien $0 \leq r < R \leq \infty$ definiere die Menge $K_a(r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$ als den offenen Kreisring um a .

Satz 85: Sei $f : K_a(r, R) \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gibt es genau ein Paar von holomorphen Funktionen

$$\begin{aligned} \text{Hauptteil von } f: & \quad f_H : \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(a)} \rightarrow \mathbb{C} \\ \text{Nebenteil von } f: & \quad f_N : D_R(a) \rightarrow \mathbb{C}, \end{aligned}$$

für die $f = f_H + f_N$ auf $K_a(r, R)$ gilt und $\lim_{z \rightarrow \infty} f_H(z) = 0$ ist.

4.2.2. Taylorentwicklung von Haupt- und Nebenteil

¹Man kann noch eine wesentliche stärkere Aussage zeigen, die als der Satz von Picard bekannt ist. Nähere Details zum Satz und eine Beweis finden sich im Buch „Funktionentheorie 2“ von R. Remmert.

Satz 83 (Großer Picardscher Satz): Sei $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte wesentliche Singularität der Funktion f . Dann nimmt f in jeder Umgebung von a jede komplexe Zahl mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft als Wert an.

In der Zerlegung entwickeln wir nun den Nebenteil f_N der Funktion in eine Taylorreihe um a , also

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n .$$

Diese konvergiert gleichmäßig auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D_\rho(a)}$ für alle $\rho < r$. Um eine Reihenentwicklung für den Hauptteil zu erhalten, definiere eine Funktion

$$g(w) := \begin{cases} f_H(a + \frac{1}{w}) & : 0 < |w| < \frac{1}{r} =: s \\ 0 & : w = 0 \end{cases} .$$

Diese ist stetig in der offenen Kreisscheibe $D_s(0)$ und holomorph in der punktierten Kreisscheibe $D'_s(0)$, und damit nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz holomorph in ganz $D_s(0)$. Somit können wir die Funktion g in eine Taylorreihe um den Nullpunkt

$$g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$$

entwickeln, wobei $w := \frac{1}{z-a} \iff z = a + \frac{1}{w}$ gilt. Setzen wir dieses w ein, so erhalten wir eine Reihenentwicklung

$$f_H(z) = g\left(\frac{1}{z-a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-a)^{-n}$$

des Hauptteils, die gleichmäßig auf $\mathbb{C} \setminus D_\rho(a)$ für alle $\rho > r$ konvergiert. Setzen wir beide Teile zusammen, so erhalten wir folglich eine Doppelreihe. Daher definiere ab nun eine **Doppelreihe** stets durch die Zerlegung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n := \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n .$$

Eine solche Doppelreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ heißt **konvergent**, wenn beide Einzelreihen konvergieren. Analog heißt eine Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ **gleichmäßig konvergent**, wenn dies für die beiden Einzelreihen

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} f_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

jeweils für sich gesehen gilt.

4.2.3. Definition der Laurent-Reihen

Satz 86 (Laurent-Entwicklung): Die Funktion f sei holomorph in $K_a(r, R)$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Koeffizienten a_n mit

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

für $z \in K_a(r, R)$. Die Koeffizienten der Reihe sind für $r < \delta < R$ gegeben durch

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-a|=\delta} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw .$$

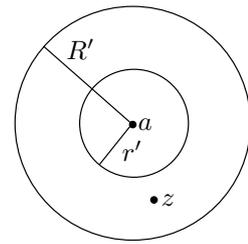


Abbildung 4.3.: Laurent-Radien.

Nachdem wir sie nun eigentlich schon hergeleitet und dabei spezifiziert haben, definieren wir nun eine Laurent-Reihe noch einmal explizit.

Definition 87: Eine **Laurent-Reihe** ist eine Doppelreihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n.$$

Sei R der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\frac{1}{r}$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$, dann konvergiert $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ absolut für alle $z \in K_a(r, R)$. Ist $r > R$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ für kein z .

4.2.4. Laurent-Reihen und isolierte Singularitäten

Satz 88: Sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ die Laurent-Entwicklung der Funktion f in $K_a(0, r) = D'_r(a)$ für den Kreisradius $r > 0$. Die isolierte Singularität a ist

1. hebbbar genau dann, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$ ist,
2. ein **Pol der Ordnung** $k \geq 1$ genau dann, wenn $a_{-k} \neq 0$ und $a_n = 0$ für $n < -k$ ist,
3. eine **wesentliche Singularität** genau dann, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$ gilt.

Wir können somit anhand der negativen Koeffizienten der Laurent-Reihe um eine isolierte Singularität direkt die Art der Singularität ablesen.

Zusätzlich zu einem „Pol der Ordnung k “, den wir im vorigen Satz anhand des niedrigsten negativen nichtverschwindenden Laurent-Koeffizienten definiert haben, definieren wir noch einen Pol im Unendlichen wie folgt.

Definition 89: Eine holomorphe Funktion $f : K_0(r, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ auf der „gelochten“ Zahlenebene hat einen **Pol der Ordnung** $k \geq 1$ **im Unendlichen**, falls die Funktion $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ einen Pol der Ordnung k im Nullpunkt hat.²

Ähnlich definieren wir eine **hebbare** und **wesentliche Singularität im Unendlichen**. Aus dem letzten Satz folgt dann der Bogen zurück zu Abschnitt 3.4 von Seite 26 über ganze und transzendente Funktionen sowie Polynome.

Satz 90: 1. Ein Polynom vom Grad $k \geq 1$ hat einen Pol der Ordnung k im Unendlichen.

2. Eine ganze transzendente Funktion hat eine wesentliche Singularität im Unendlichen.

Für den weiteren Verlauf der Vorlesung wir der folgende Begriff einen zentralen Stellenwert einnehmen.

Definition 91: Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $A \subset U$ diskret. Eine holomorphe Funktion $f : U \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$, die in jedem Punkt von A einen Pol hat, heißt **meromorphe Funktion** auf U .

Beispiel: Betrachte $f(z) := \frac{1}{\sin z}$ mit $U := \mathbb{C}$ und $A := \pi\mathbb{Z}$ oder etwa rationale Funktionen.

²Es ist bei dieser Definition wichtig, dass das Holomorphiegebiet der Funktion alle „Unendlichkeiten“ enthält, d.h. zumindest die Form $K_0(r, \infty)$ für $r > 0$ hat, da nur dann der Typ der Singularität wohldefiniert ist. Zur Veranschaulichung des Vorgangs sei auf die **Riemannsche Zahlenkugel** ab Seite 57 verwiesen.

Salopp gesagt ist eine meromorphe Funktion somit eine holomorphe Funktion mit „Definitions-löchern“, die jeweils durch die Unendlichkeit von Polen entstehen. Dabei ist zwischen denjenigen meromorphen Funktionen mit **endlich** und **unendlich vielen Singularitäten** zu unterscheiden, die Ersteren lassen sich durch den folgenden Satz sehr genau klassifizieren.

Satz 92: *Jede meromorphe Funktion f auf \mathbb{C} mit nur endlich vielen Singularitäten und mit keiner wesentlichen Singularität im Unendlichen ist eine rationale Funktion.*

Abschließend betrachten wir nun noch ein paar Beispiele zur Laurent-Entwicklung von Funktionen.

Beispiel: 1. $f(z) := (z - a)^{-n}$ mit $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entwickle zunächst die Taylorreihe für $|z| < |a|$ um den Nullpunkt, wobei für die k -te Ableitung der Funktion

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= (-n) \cdots (n - k - 1)(z - a)^{-n-k} = (-1)^k \frac{(n + k - 1)!}{(n - 1)!} (z - a)^{-n-k} \\ \implies \frac{f^{(k)}(0)}{k!} &= (-1)^k \binom{n + k - 1}{k} (-a)^{-n-k}. \end{aligned}$$

gilt. Für $|z| < |a|$ gilt somit

$$\begin{aligned} (z - a)^{-n} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n + k - 1}{k} (-a)^{-n-k} z^k \\ &= (-a)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n + k - 1}{k} \left(\frac{z}{a}\right)^k. \end{aligned}$$

Die Laurentreihe für $|z| > |a|$ erhält man aus der Zerlegung

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z - a)^n} &= \frac{1}{(-az)^n} \frac{1}{\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{a}\right)^n} = \frac{1}{(-az)^n} \underbrace{\left(-\frac{1}{a}\right)^{-n}}_{\frac{1}{z^n}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n + k - 1}{k} \left(\frac{a}{z}\right)^k \\ &= a^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n + k - 1}{k} \left(\frac{a}{z}\right)^{k+n} \frac{1}{z^n} \end{aligned}$$

2. $f(z) := \frac{1}{z(z+i)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{(z+i)^2}$, dann folgt

$$1 = (z + i)^2 A + z(z + i)B + zC \implies A = -1, \quad B = 1, \quad C = i,$$

also ist die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z+i} + \frac{1}{(z+i)^2}$.

5. Die verallgemeinerte Cauchy-Formel

5.1. Umlaufzahlen

In den nächsten zwei Abschnitten werden wir nun Umlaufzahlen und Wegkomponenten einführen, um später auf Seite 36 die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel zu beweisen. Wir beginnen mit dem folgenden Satz zur Wohldefiniertheit der Umlaufzahlen.

Satz 93: Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein geschlossener Integrationsweg. Dann existiert genau eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$, sodass γ homotop in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ zum Weg $a_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $t \mapsto e^{2\pi i n t}$ ist, der die Null n -mal gegen den Uhrzeigersinn umläuft. Außerdem gilt

$$n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$

Durch Verschiebung können wir die Umlaufzahl um einen beliebigen Punkt dann wie folgt definieren.

Definition 94: Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\}$ ein geschlossener Integrationsweg. Wir definieren die **Umlaufzahl** $n(\gamma, a)$ des Wegs γ **um den Punkt** a wie im vorigen Satz.

5.2. Wegkomponenten

Als nächstes betrachten wir nun die Eigenschaften von Wegzusammenhangskomponenten, die wir kurz Wegkomponenten nennen. Ihre Definition lautet:

Definition 95: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Für zwei Punkte $p, q \in M$ definieren wir

$$p \sim q \iff \text{es existiert ein stetiger Weg von } p \text{ nach } q \text{ in } M.$$

Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf M . Die Äquivalenzklassen heißen **Wegkomponenten von** M . Falls $M \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, so ist auch jede Wegkomponente von M offen. Ist M außerdem zusammenhängend, so hat M auch nur eine Wegkomponente.

Satz 96: Sei γ ein Integrationsweg in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Dann ist $z \mapsto n(\gamma; z)$ eine stetige Abbildung $\mathbb{C} \setminus \text{Sp}(\gamma) \rightarrow \mathbb{Z}$, und deswegen konstant auf jeder Wegkomponente von $\mathbb{C} \setminus \text{Sp}(\gamma)$. \square

Beispiel: Sei $\gamma(t) := z_0 + re^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ und $r > 0$ ein kreisförmiger Weg vom Radius r um z_0 . Falls $|a - z_0| > r$ ist, so ist $w \mapsto \frac{1}{w-a}$ holomorph in der konvexen Menge K , also gilt $\oint_{\gamma} \frac{dw}{w-a} = 0$ nach Cauchy, und somit ist die Umlaufzahl $n(\gamma, a) = 0$. Ist $|a - z_0| < r$, so gilt $\oint_{\gamma} \frac{dw}{w-a} = 2\pi i$.

Der folgende Satz zeigt, dass zwei unterschiedliche Wegkomponenten von $\mathbb{C} \setminus \text{Sp}(\gamma)$ stets auch unterschiedliche Umlaufzahlen aufweisen. Die anschauliche Aussage zu beweisen erfordert allerdings einigen technischen Aufwand, wie wir sehen werden.

Satz 97: Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $t_0 \in]a, b[$ so gewählt, dass $w := \gamma(t_0)$, $\gamma'(t_0) \neq 0$ und $\gamma^{-1}(w) = \{t_0\}$ gelten.

1. Für alle hinreichend kleinen Kreisradien $r > 0$ gibt es $a', b' \in \mathbb{R}$ mit $a < a' < t_0 < b' < b$, sodass die folgenden drei Eigenschaften gelten (vgl. Abbildung 5.1):

- a) $\text{Sp}(\gamma) \cap \overline{D_r(w)} = \gamma([a', b'])$
- b) $\text{Sp}(\gamma) \cap \partial D_r(w) = \{\gamma(a'), \gamma(b')\}$
- c) $\overline{D_r(w)} \setminus \text{Sp}(\gamma)$ hat genau zwei Zusammenhangskomponenten C_1 und C_2 .

2. Seien r, a' und b' so gewählt, dass die vorigen drei Eigenschaften erfüllt sind, sowie C_1 und C_2 so nummeriert, dass $C_1 \cap \partial D_r(w)$ der positiv orientierte Kreisbogen von p nach q ist (vgl. Abbildung 5.2). Dann gilt $n(\gamma, z_2) = n(\gamma, z_1) + 1$ für alle $z_1 \in C_1$ und $z_2 \in C_2$.

Die beiden Wegkomponenten aus dem vorigen Satz können wir durch einen weiteren Satz ein wenig genauer spezifizieren. Zuerst führen wir noch einen weiteren Begriff ein.

Definition 98: Ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **einfach geschlossen**, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ und $\gamma|_{[a,b]}$ injektiv ist.

Satz 99 (Jordanscher Kurvensatz): Sei γ ein einfach geschlossener Weg in \mathbb{C} . Dann hat $\mathbb{C} \setminus \text{Sp}(\gamma)$ genau zwei Wegkomponenten.¹

Korollar 100: Falls γ ein einfach geschlossener Integrationsweg ist, C_0 die unbeschränkte und C_1 die beschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus \text{Sp}(\gamma)$ ist, so gibt es ein $\varepsilon = \pm 1$

$$n(\gamma; z) = \begin{cases} 0 & : z \in C_0 \\ \varepsilon & : z \in C_1 \end{cases} .$$

Wir nennen einen einfach geschlossenen Weg γ **positiv orientiert**, wenn $\varepsilon = +1$ gilt. Den Orientierungsbegriff eines Weges kann man sich als den Drehsinn des Weges innerhalb der komplexen Ebene vorstellen.

¹In der Analysis III haben wir einen sehr ähnlichen Satz bewiesen, der hier allerdings streng genommen nicht anwendbar ist, da $\text{Sp}(\gamma)$ im Allgemeinen keine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ist.

Satz (Jordan-Brouwer Zerlegungssatz): Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, zusammenhängende $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann hat $\mathbb{R}^n \setminus X$ genau zwei Zusammenhangskomponenten, eine beschränkte C_1 und eine unbeschränkte C_0 . Der Abschluß $\overline{C_1}$ ist wieder eine kompakte, berandete, n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n mit $\partial \overline{C_1} = X$.

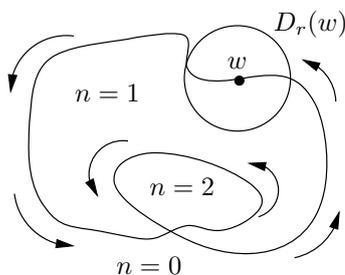


Abbildung 5.1.: Darstellung der Voraussetzungen zum ersten Teil von Satz 97.

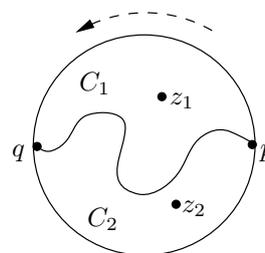


Abbildung 5.2.: Darstellung der Konfiguration zum zweiten Teil.

5.3. Verallgemeinerte Cauchy-Formel

Im verallgemeinerten Cauchy-Satz werden die Umlaufzahlen sehr wichtig, wir führen daher noch die folgenden beiden Begriffe ein.

Definition 101: Sei γ ein geschlossener Integrationsweg in der offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$.

1. γ heißt **nullhomotop in U** , falls γ homotop in U zu einem konstanten Weg ist.
2. γ heißt **nullhomolog in U** , falls die Umlaufzahl $n(\gamma; z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus U$ ist.

Die Eigenschaft nullhomotop impliziert dabei nullhomolog, die Umkehrung gilt aber nicht, wie in Abbildung 5.3 zu sehen ist.

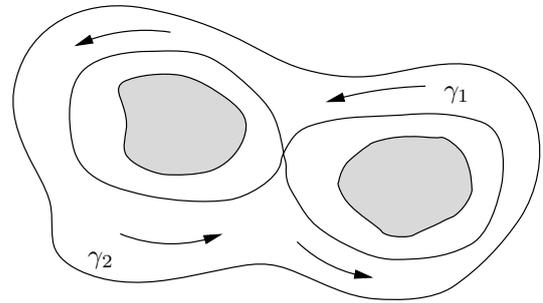


Abbildung 5.3.: $\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}$ ist nullhomolog, aber nicht nullhomotop.

Satz 102 (Morera): Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

1. Die Funktion f ist holomorph.
2. Für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset U$ gilt $\oint_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$.

Satz 103 (Allgemeiner Cauchy-Integralsatz): Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und γ ein nullhomologer geschlossener Integrationsweg in U . Sei außerdem die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gelten die folgenden beiden Aussagen:

1. Es gilt $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$.
2. Für jeden Punkt $z \in U \setminus \text{Sp}(\gamma)$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$n(\gamma; z) \cdot \frac{f^{(k)}(z)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw .$$

6. Residuenkalkül

Wir kommen nun zu einem der wichtigsten und praktisch anwendbarsten Kapitel der Funktionentheorie, dem Residuenkalkül. Mit seiner Hilfe werden wir in der Lage sein, verschiedenste Integrale durch Integration um Pole zu berechnen. Die zentrale Aussage liefert dabei der Residuensatz, der eine Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel auf Funktionen mit isolierten Singularitäten darstellt.

6.1. Das Residuum

6.1.1. Definition und Berechnung des Residuums

Zuerst definieren wir nun den Begriff des Residuums (lat. „Rest“).

Definition 104: Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine Umgebung von $a \in \mathbb{C}$, dann heißt $U \setminus \{a\}$ **punktierte Umgebung von a** .

Definition 105: Sei f holomorph in einer punktierten Umgebung $U \setminus \{z_0\}$ von z_0 mit Laurent-Reihe $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Wir definieren das **Residuum von f in z_0** als

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\delta} f(z) dz .$$

Die Berechnung des Residuums durch ein Kurvenintegral ist sehr umständlich. Die folgenden beiden Sätze liefern zwei nützliche Identitäten für die Berechnung des Residuums mithilfe einfacher Differentiationen.

Satz 106: Sei f holomorph in einer punktierten Umgebung von z_0 , wobei z_0 entweder eine hebbare Singularität oder ein Pol der Ordnung kleiner oder gleich k sei. Definiere die Funktion $g(z) := (z - z_0)^k f(z)$, dann ist diese Funktion holomorph in einer Umgebung von z_0 . Dann gilt

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

und $\operatorname{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$ wenn $k = 1$ ist.

Satz 107: Seien $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph in einer Umgebung von z_0 . Hat g eine einfache Nullstelle im Punkt z_0 , so gilt für das Residuum

$$\operatorname{res}_{z_0} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} .$$

Beispiel: $f(z) := \frac{1}{(\operatorname{Log} z)^2}$ für $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \cup \{1\}$, finde das Residuum in $z_0 = 1$. Wegen $\operatorname{Log}' z = \frac{1}{z}$ ist $z_0 = 1$ eine einfache Nullstelle von $\operatorname{Log} z$. Also hat f einen Pol zweiter Ordnung in 1. Mit

$$g(z) := (z - 1)^2 f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{z - 1}{\operatorname{Log} z} \right)^2$$

folgt $\operatorname{res}_1(f) = g'(1)$. Mit der Taylor-Reihendarstellung des Logarithmus um $z_0 = 1$

$$\operatorname{Log} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \dots,$$

definieren wir eine weitere Hilfsfunktion

$$h(z) := \frac{\operatorname{Log} z}{z-1} = 1 - \frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{3} - \dots,$$

sodass $g(z) = \frac{1}{h(z)^2}$ und $g'(z) = -2 \frac{h'(z)}{h^3(z)}$ folgt. Da $h(1) = 1$ und $h'(1) = -\frac{1}{2}$ gilt, folgt $g'(1) = 1$, also ist das Residuum der Funktion f im Punkt $z_0 = 1$ dementsprechend $\operatorname{res}_1(f) = 1$.

6.1.2. Residuenberechnung bei rationalen Funktionen

Für die Berechnung von **Residuen rationaler Funktionen** verwendet man entweder den vorigen Satz oder die **Partialbruchzerlegung**.

Beispiel: 1. Betrachte auf $\mathbb{C} \setminus \{0, -i\}$ die Funktion

$$f(z) := \frac{1}{z(z+i)^2} = \underbrace{\frac{1}{z}}_{g(z)} - \underbrace{\frac{1}{z+i} + \frac{1}{(z+i)^2}}_{h(z)} = g(z) + h(z),$$

dann ist h holomorph in einer beliebigen Umgebung von $z_0 = 0$. Für das Residuum folgt

$$\operatorname{res}_0(f) = \operatorname{res}_0(g) + \operatorname{res}_0(h) = 1 + 0 = 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{res}_{-i}(f) = -1.$$

2. $f(z) := \frac{1}{\cos^2(z)}$. Um die Singularitäten zu finden, sucht man, wo die Kosinusfunktion Nullstellen in der komplexen Ebene hat. Seien $x, y \in \mathbb{R}$, dann gilt nach Seite 11

$$\cos(x+iy) \stackrel{\text{Satz 24}}{=} \underbrace{\cos x \cosh y}_{>0} - i \sin x \underbrace{\sinh y}_{\sinh 0=0} = 0 \iff \cos x = 0 \text{ und } y = 0,$$

da $\cosh y > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ ist. Der reelle Kosinus hat nur die bekannten reellen Nullstellen $(k + \frac{1}{2})\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$, alle diese Nullstellen sind wegen $\cos' x = -\sin x$ von erster Ordnung, analoges gilt bei Betrachtung des Sinus.

Also hat f einen Pol der Ordnung 2 in allen $z_0 = (k + \frac{1}{2})\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Betrachte die Funktion

$$g(z) := f\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{n=-2}^{\infty} a_n z^n$$

mit $g(-z) = g(z)$. Da diese Funktion also gerade ist, folgt

$$0 = g(z) - g(-z) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k-1} z^{2k-1}$$

und wegen der Eindeutigkeit der Laurent-Entwicklung muss $a_{2k-1} = 0$ für alle k gelten, und damit folgt insbesondere

$$0 = \operatorname{res}_0(g) = -\operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}}(f).$$

Wegen der Periodizität $f(z + \pi) = f(z)$ folgt außerdem, dass alle Pole das Residuum 0 haben.

6.2. Der Residuensatz

Wir wollen nun den zentralen Residuensatz des Residuenkalküls beweisen, nachdem wir uns mit der Berechnung der Residuen selbst beschäftigt haben.

Satz 108 (Residuensatz): Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $B \subset U$ diskret, $U \setminus B$ offen (d.h. B habe keine Häufungspunkte in U) und die Funktion $f : U \setminus B \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sei γ ein geschlossener Integrationsweg in $U \setminus B$, der nullhomolog in U ist. Dann gilt

$$\oint_{\gamma} f(w) dw = 2\pi i \cdot \sum_{b \in B} n(\gamma; b) \operatorname{res}_b(f).$$

In vielen Anwendungen ist $U = \mathbb{C}_m$ also sind alle geschlossenen Wege nullhomolog in U und B ist endlich.

6.3. Anwendung des Residuensatzes

Wir werden nun mehrere verschiedene Integraltypen mit isolierten Singularitäten - hauptsächlich rationale Funktionen - betrachten und nach näherer Analyse mit dem Residuensatz berechnen.

6.3.1. Rationale Funktionen $R(\cos t, \sin t)$

Im Folgenden betrachten wir Integrale der Form $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$. Es sei $R(x, y)$ eine rationale Funktion, sodass $R(\cos t, \sin t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist.

Definition 109: Es seien $P(z)$ und $Q(z)$ Polynome ungleich Null. Dann ist durch $R(z) := \frac{P(z)}{Q(z)}$ eine rationale Funktion mit $\deg R = \deg P - \deg Q$ definiert.

Mit der Exponentialdarstellung der trigonometrischen Funktionen folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt &= \int_0^{2\pi} R\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \frac{e^{it} - e^{-it}}{2}\right) \frac{ie^{it}}{ie^{it}} dt \\ &= \frac{1}{i} \oint_{\gamma} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2}\right) z^{-1} dz \end{aligned}$$

mit dem Integrationsweg $\gamma(t) := e^{it}$. Definieren wir den Integranden kurz als

$$f(z) := R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2}\right) z^{-1},$$

dann ist f eine rationale Funktion, hat also nur endlich viele Pole. Dann gilt

$$n(\gamma; z) = \begin{cases} 1 & : |z| < 1 \\ 0 & : |z| > 1 \end{cases}$$

für die Umlaufzahl, und mit dem Residuensatz erhalten wir schließlich

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi \sum_{|z| < 1} \operatorname{res}_z(f).$$

Man beachte, dass dieser Ausdruck wohldefiniert ist, da $\operatorname{res}_z(f) = 0$ für ein beliebiges z im Holomorphiegebiet gilt - das Residuum ist also nur an Singularitätspunkten nichttrivial.

Beispiel: Für $w > 1$ gilt $\int_0^\pi \frac{dt}{w + \cos t} = \frac{\pi}{\sqrt{w^2 - 1}}$. Zur Herleitung betrachte

$$\int_0^\pi \frac{dt}{w + \cos t} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{w + \cos t} = \pi \sum_{|z| < 1} \operatorname{res}_z(f)$$

mit $f(z) := \frac{1}{z} \frac{1}{w + \frac{z+z^{-1}}{2}} = \frac{2}{z^2 + 2zw + 1}$.

Dann gilt $z^2 + 2wz + 1 = (z + w)^2 - (w^2 - 1) = (z + w + a)(z + w - a)$ mit $a := \sqrt{w^2 - 1}$, was wegen der Voraussetzung $w > 1$ wohldefiniert und reell ist. Ist $w + a > 1$, dann gilt

$$w - a = \frac{w^2 - a^2}{w + a} = \frac{1}{w + a} < 1 \quad \implies \quad f(z) = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{z + w - a} - \frac{1}{z + w + a} \right),$$

also ist $a - w$ der einzige Pol von f in $D_1(0)$ und mit $\operatorname{res}_{a-w}(f) = \frac{1}{a}$ folgt für das Integral

$$\int_0^\pi \frac{dt}{w + \cos t} = \pi \sum_{|z| < 1} \operatorname{res}_z(f) = \frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{\sqrt{w^2 - 1}}.$$

6.3.2. Gewöhnliche rationale Funktionen

Satz 110: Sei $R(z)$ eine rationale Funktion mit $\deg R \leq -2$. Falls R keine Pole auf \mathbb{R} hat, so gilt die Gleichheit

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{\Im m(z) > 0} \operatorname{res}_z(R) = -2\pi i \cdot \sum_{\Im m(z) < 0} \operatorname{res}_z(R).$$

Beispiel: Betrachte für $P(z) := z^2$ und $Q(z) := 1 + z^4$ das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Die Nullstellen von $Q(z)$ sind wegen $z^4 = -1 \iff z^2 = \pm i$ gerade die ungerade Potenzen der achten komplexen Einheitswurzel $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, also a, a^3, a^5 und a^7 . Durch Ableiten folgt trivial, dass Q nur einfache Pole hat. Dann gilt

$$\operatorname{res}_a(R) = \frac{P(a)}{Q'(a)} = \frac{a^2}{4a^3} = \frac{1}{4a} \quad \text{und} \quad \operatorname{res}_{a^3}(R) = \frac{1}{4a^3}$$

und damit folgt für den Weg des zu berechnenden Integrals schließlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx = 2\pi i \left(\frac{1}{4a} + \frac{1}{4a^3} \right) \stackrel{a^2=i}{=} \frac{\pi i}{2a} (1 - i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Satz 111: Sei f eine meromorphe Funktion auf einer offenen Umgebung der oberen komplexen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \Im m(z) \geq 0\}$, sodass die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. f hat nur endlich viele Pole.
2. f hat keine Pole auf der reellen \mathbb{R} -Achse.
3. Es geht $r \cdot \max_{|z|=r, \Im m(z) \geq 0} |f(z)| \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$.

Dann gilt für das Integral über f entlang der reellen Achse

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{\Im m(z) > 0} \operatorname{res}_z(f) .$$

Bemerkung: Wir wissen hierbei nicht, ob $\int_0^\infty f(x) dx$ existiert. Betrachte etwa $f(x) = \frac{1}{x}$, dann gilt aus Symmetriegründen $\int_{-M}^M \frac{1}{x} dx = 0$, aber $\int_0^M \frac{1}{x} dx = \infty$ für alle $M > 0$.

6.3.3. Rationale Funktionen $R(x)e^{ix}$ ohne reelle Pole

Lemma 112: Sei $R(z)$ eine rationale Funktion mit $\deg R \leq -1$ und ohne Pole auf \mathbb{R} . Dann existieren die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^\infty R(x) \cos x dx := \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M R(x) \cos x dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty R(x) \sin x dx .$$

Nach dem Beweis der Wohldefiniertheit des vorigen Integrals werden wir mit der komplexen Exponentialfunktion und der Eulerschen Identität die Verbindung zum Residuensatz herstellen.

Satz 113: Sei $R(z)$ eine rationale Funktion mit $\deg R \leq -1$, die auf der reellen \mathbb{R} -Achse keine Pole hat. Dann gilt die Identität

$$\int_{-\infty}^\infty R(x)e^{ix} dx = 2\pi i \cdot \sum_{\Im m(z) > 0} \operatorname{res}_z (R(w)e^{iw}) .$$

Beispiel: Sei $a > 0$ gegeben, dann gilt nach dem vorigen Satz und der Residuen-Differentiationsformel für Pole erster Ordnung aus Satz 107

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\cos x}{a^2 + x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \Re \left(\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{a^2 + x^2} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \Re \left(2\pi i \cdot \operatorname{res}_{ia} \left[\frac{e^{iz}}{(z+ia)(z-ia)} \right] \right) = \frac{1}{2} \Re \left(2\pi i \frac{e^{-a}}{2ia} \right) = \frac{\pi e^{-a}}{2a} . \end{aligned}$$

6.3.4. Rationale Funktionen $R(x)e^{ix}$ mit einfachen reellen Polen

Wir wollen nun betrachten, wie man (zumindest in erster Betrachtungsweise) über die Pole selbst integrieren kann. Dazu definieren wir den folgenden Begriff.

Satz 114: Seien $a < b < c$, die Funktion $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und im Punkt b differenzierbar. Dann existiert der Grenzwert

$$\text{P. V.} \int_a^c \frac{f(x)}{x-b} dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{b-\varepsilon} + \int_{b+\varepsilon}^c \right) \frac{f(x)}{x-b} dx ,$$

wobei das „P. V.“ für engl. „principal value“, d.h. für den **Hauptwert des Integrals**, steht.

Mit dem folgenden Lemma zeigen wir, dass einfache Pole nur einen endlichen Betrag zu einem Integral über sie beitragen, der durch das Residuum des Pols bestimmt ist.

Lemma 115: Sei $a \in \mathbb{C}$ ein einfacher Pol und die zugehörige Funktion f in einer punktierten Umgebung von a holomorph. Dann gilt für einen halbkreisförmigen Weg $\gamma_r(t) := re^{it}$ mit $t \in [0, 1]$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_r} f(z) dz = \pi i \cdot \operatorname{res}_a(f) .$$

$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = 2\pi \cdot \sum_{ z <1} \operatorname{res}_z \left[R \left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2} \right) z^{-1} \right]$ <p>für R rational</p>
$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{\Im m(z)>0} \operatorname{res}_z(R)$ <p>für R rational, $\deg R \leq -2$ und ohne Pole auf \mathbb{R}</p>
$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{\Im m(z)>0} \operatorname{res}_z(f)$ <p>für f mit endlich vielen Polen, ohne reelle Pole, $r \sup_{\substack{ z =r \\ \Im m(z) \geq 0}} f(z) \rightarrow 0$</p>
$\text{P. V.} \int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix} dx = 2\pi i \cdot \sum_{\Im m(z)>0} \operatorname{res}_z(R(w)e^{iw}) + \pi i \cdot \sum_{x \in \mathbb{R}} \operatorname{res}_x(R(w)e^{iw})$ <p>für R rational, $\deg R \leq -1$, einfache Pole auf \mathbb{R}</p>
$\int_0^{\infty} R(x) dx = - \sum_{x \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty[} \operatorname{res}_z(R \operatorname{Lg})$ <p>für R rational, $\deg R \leq -2$ und ohne Pole auf $[0, \infty[$</p>

Tabelle 6.1.: Übersicht über die mit dem Residuensatz berechneten rationalen Integrale.

die sechste Einheitswurzel ist. Dann folgt für den Logarithmus-Zweig Lg aus dem vorigen Satz

$$\underbrace{\operatorname{Lg}(-1) - \operatorname{Lg}(a)}_{\int_{\gamma} \frac{dz}{z}} = \operatorname{Lg}(a^{-1}) = \operatorname{Lg}(-1) = \frac{2\pi i}{3}$$

mit $\gamma(t) := e^{it}$ für $t \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$. Falls z eine Nullstelle von p ist, gilt

$$\operatorname{res}_z \left(\frac{\operatorname{Lg}}{p} \right) = \frac{\operatorname{Lg}(z)}{p'(z)}$$

für das Residuum, und damit folgt dann schließlich für das zu berechnende Integral

$$\begin{aligned} - \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} &= \operatorname{res}_{-1} \left(\frac{\operatorname{Lg}}{p} \right) + \operatorname{res}_a \left(\frac{\operatorname{Lg}}{p} \right) + \operatorname{res}_{a^{-1}} \left(\frac{\operatorname{Lg}}{p} \right) \\ &= \frac{\operatorname{Lg}(-1)}{3} + \frac{\operatorname{Lg}(-1) \left(-\frac{2\pi i}{3} \right)}{3a^2} + \frac{\operatorname{Lg}(-1) + \frac{2\pi i}{3}}{3a^{-2}} \\ &= \frac{\operatorname{Lg}(-1)}{3} (1 + a^2 + a^{-2}) + \frac{2\pi i}{9} (a^2 - a^{-2}) \\ &= \frac{2\pi i}{9} (-a^{-1} + a) = \frac{2\pi i}{9} (a - \bar{a}) = -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

7. Umkehrung von Funktion und unendliche Partialbruchzerlegung

Nicht nur für die Berechnung von Integralen erweist sich der Residuensatz als nützlich, es lassen sich auch zahlreiche funktionentheoretische Anwendungen finden. Mit dem Prinzip vom Argument und dem Satz von Rouché lässt sich etwa die Anzahl der Nullstellen und Pole einer Funktion durch Berechnung eines Integrals angeben. Außerdem betrachten wir die Umkehrung holomorpher Funktionen genauer.

7.1. Das Prinzip vom Argument

Auf die etwas eigentümliche Bezeichnung des folgenden Satzes gehen wir anschließend ein, zunächst folgt nun der Beweis.

Satz 118 (Prinzip vom Argument): Sei f meromorph auf dem Gebiet G mit den Nullstellen z_1, \dots, z_m und den Polen p_1, \dots, p_n je nach Vielfachheit gezählt. Sei g holomorph auf G und γ ein nullhomologer Integrationsweg in G , der durch keinen Punkt z_j oder p_j läuft. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \underbrace{\sum_{i=1}^m g(z_i) n(\gamma; z_i)}_{\text{Nullstellen}} - \underbrace{\sum_{j=1}^n g(p_j) n(\gamma; p_j)}_{\text{Pole}} .$$

Insbesondere gilt dann, falls γ einfach geschlossen und $g := 1$ ist,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \# \{ \text{Nullstellen von } f \text{ innerhalb } \gamma \} - \# \{ \text{Pole von } f \text{ innerhalb } \gamma \} ,$$

ebenfalls wieder mit Vielfachheiten gezählt.

Bemerkung: Warum nennt man diesen Satz „Prinzip vom Argument“? Dazu betrachte einen Integrationsweg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, dann folgt

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &\stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{(f \circ \gamma)'(t)}{(f \circ \gamma)(t)} dt \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \oint_{f \circ \gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i \cdot \left(\text{Gesamtänderung des Arguments von } \frac{f \circ \gamma(t)}{z} \text{ wenn } t \text{ durch } [a, b] \text{ läuft} \right) . \end{aligned}$$

7.2. Umkehrung holomorpher Funktionen

Bevor wir den zentralen Darstellungssatz für holomorphe Funktionen und ihre Umkehrbarkeit beweisen, betrachten wir noch die folgenden Ausführungen.

Bemerkung: Zuerst ein kurzer Einschub: Sei f holomorph und nicht konstant auf $D_R(z_0)$ mit $R > 0$. Da f nicht konstant ist, ist z_0 ein isolierter Punkt von $f^{-1}(w_0)$, d.h. $f(z_0) = w_0$. Wähle nun $r > 0$ so klein das $w_0 \notin f(\partial D_r(z_0))$ liegt, wobei diese Menge kompakt, also insbesondere abgeschlossen ist. Also findet sich ein $\delta > 0$ mit

$$f(\partial D_r(z_0)) \cap D_\delta(w_0) = \emptyset,$$

d.h. für $|z - z_0| = r$ gilt dann $|f(z) - w_0| > \delta$. Dann aber gilt für alle $w \in D_\delta(w_0)$

$$h(w) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = \# \left\{ \begin{array}{l} \text{Lösungen der Gleichung } f(z) - w = 0 \text{ mit} \\ |z - z_0| < r \text{ mit Vielfachheiten gezählt} \end{array} \right\}$$

nach dem Satz vom Argument. Also ist $h : D_\delta(w_0) \rightarrow \mathbb{N}_0$ stetig, also folglich $h \equiv h(w_0) \geq 1$ konstant. Daraus folgt quasi als neuer Beweis des Satzes 63 von Seite 25:

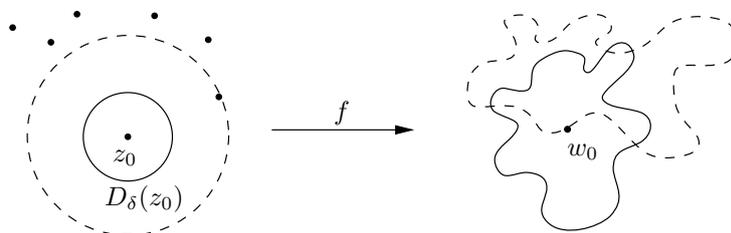


Abbildung 7.1.: Darstellung der Urbilder und Umgebungen.

Korollar 119 (Gebietstreue): Sei f holomorph und nicht konstant auf einem Gebiet G , dann ist auch das Bild $f(G)$ ein Gebiet, also offen und zusammenhängend.

7.2.1. Der Darstellungs- und Umkehrbarkeitssatz

Satz 120: Sei die Funktion f holomorph in einer offenen Umgebung von z_0 . Dann gelten:

1. Falls die Ableitung $f'(z_0) \neq 0$ ist, dann hat der Punkt z_0 eine offene Umgebung $V \subset U$, sodass die Einschränkung $f|_V$ injektiv und das Bild $f(V)$ ebenfalls offen sind, sowie die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(V) \rightarrow V$ holomorph ist.
2. Falls $f'(z_0) = 0$ ist, dann sei $k \geq 2$ die Ordnung der Nullstelle von $f(z) - w_0$ für den Punkt $w_0 := f(z_0)$. Dann existiert eine offene Umgebung $V \subset U$ von z_0 und eine holomorphe Funktion g auf V mit einer einfachen Nullstelle in z_0 , sodass

$$f(z) = f(z_0) + g(z)^k \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{g} & g(V) \xrightarrow{z \mapsto w_0 + z^k} \mathbb{C} \\ & & \uparrow f \end{array}$$

in V gilt und für alle $w \in f(V) \setminus \{f(z_0)\}$ existieren genau k Punkte $z \in V$ mit $f(z) = w$. Topologisch betrachtet sieht die Funktion f um den Punkt z_0 dann lokal wie die Potenzierung $z \mapsto z^k$ aus. Insbesondere ist f auf keiner Umgebung von z_0 injektiv. (?)

Der Satz liefert uns also im Fall einer nicht verschwindenden Ableitung - analog zum Satz von der inversen Abbildung aus der reellen Analysis - die Existenz einer lokalen Umkehrfunktion, die nun zusätzlich biholomorph ist.

Definition 121: Eine Abbildung $f : U \rightarrow f(U)$ heißt **biholomorph auf U** , wenn f bijektiv und holomorph ist, und außerdem die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ ebenfalls holomorph ist.

Korollar 122: Sei f injektiv und holomorph auf der offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$, dann ist $f(U)$ offen und die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ holomorph, also ist f biholomorph auf U .

Satz 123: Sei f holomorph und injektiv auf einer Umgebung von $\overline{D_r(a)}$ mit $r > 0$. Dann gilt für alle Punkte $w \in f(D_r(a))$ des Bildes

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-w|=r} \frac{z f'(a)}{f(z) - w} dz .$$

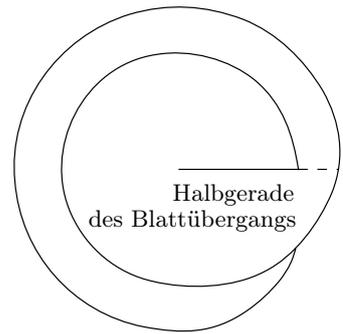


Abbildung 7.2.: Zweiblättrige Ebene.

7.2.2. Nullstellen- und Pol-Anzahlen meromorpher Funktionen

Satz 124 (Rouché): Sei γ ein einfach geschlossener Integrationsweg, $U := \text{int}(\gamma)$ der von γ umrandete Bereich und f sowie g meromorph auf einer Umgebung von \overline{U} , sodass keine Nullstellen oder Pole auf $\text{Sp}(\gamma)$ liegen. Seien dann die Anzahlen

$$N_f, N_g := \# \{ \text{Nullstellen von } f \text{ bzw. } g \text{ in } U \}$$

$$P_f, P_g := \# \{ \text{Pole von } f \text{ bzw. } g \text{ in } U \}$$

definiert. Falls für alle $z \in \text{Sp}(\gamma)$ die Ungleichung $|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$ erfüllt ist, so gilt $N_f - P_f = N_g - P_g$.

In praktischen Anwendungen des Satzes von Rouché sind f und g oft holomorphe Funktionen (also polfrei) und es gilt $|f + g| < |f|$ auf $\text{Sp}(\gamma)$, sodass $N_f = N_g$ gilt.

Beispiel: $f(z) := 2z^2 + 1$ hat genau zwei einfache Nullstellen in $D_1(0)$. Wieviele Nullstellen aber hat $g(z) := az^n - 2z^2 - 1$ für $a \in \mathbb{C}$ und $n \geq 1$? Für $|z| = 1$ gilt

$$|f(z) + g(z)| \stackrel{\text{def}}{=} |az^n| = |a| .$$

Außerdem wissen wir $|f(z)| \geq |2z^2| - 1 = 1$, von g ist aber nur das triviale $|g(z)| \geq 0$ bekannt. Ist $|a| < 1$, so gilt $|f + g| < |f|$ auf $\partial D_1(0)$. In diesem Fall hat g auch genau zwei Nullstellen in $D_1(0)$, wie üblich mit Vielfachheiten gezählt.

7.3. Unendliche Partialbruchzerlegung

Wir wechseln nun von den holomorphen und meromorphen Funktionen zum Thema der unendlichen Partialbruchzerlegung, was uns unter anderem eine Reihenentwicklung der Tangens- und Cotangens-Funktion liefern wird.

7.3.1. Holomorphe Funktionenfolgen

Bevor wir mit der unendlichen Partialbruchzerlegung beginnen, führen wir ein paar Sätze über die Konvergenz holomorpher Funktionenfolgen ein.

Satz 125: Seien $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ holomorphe Funktionen auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$, die auf U gleichmäßig gegen f konvergieren. Dann ist auch die Grenzfunktion f holomorph.

Definition 126: Seien f und $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Funktionen auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$. Die Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergiert lokal gleichmäßig gegen f auf U** , wenn die folgenden zwei äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

1. Jedes $z \in U$ besitzt eine Umgebung $V \subset U$, auf der $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion f konvergiert.
2. Die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf jedem kompakten $K \subset U$.

Damit können wir nun den Satz von Weierstraß beweisen, der die Konvergenz der höheren Ableitungen einer Funktionenfolge liefert.

Satz 127 (Weierstraß): Seien $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ holomorphe Funktionen auf der offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergieren. Dann ist die Grenzfunktion f ebenfalls holomorph und für alle $k \geq 0$ konvergiert die Ableitungsfolge $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ ebenfalls lokal gleichmäßig.

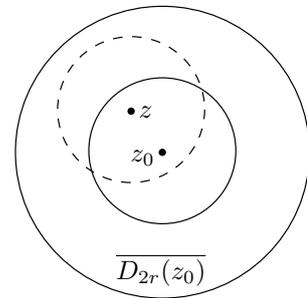


Abbildung 7.3.: Kreise.

7.3.2. Partialbruchzerlegung von $\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$

Was für eine Funktion ist beispielsweise $f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ mit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$? Für die Konvergenz der Reihe brauchen wir nur die Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty$ zu betrachten, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ konvergiert also absolut für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ und gleichmäßig auf allen beschränkten Teilmengen von $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, also ist f zudem auch stetig.

Betrachten wir, wie sich f bei Veränderung des Wertes verhält. Für die Funktion gilt

$$f(z+1) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{((z+1)-n)^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-(n-1))^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \stackrel{\text{def}}{=} f(z),$$

also ist f auch 1-periodisch. Ist f also eine besondere trigonometrische Funktion?

Satz 128: Für die Funktion $f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ gelten die folgenden beiden Eigenschaften:

1. f ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ und hat Pole zweiter Ordnung in jedem $z \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$. Der Hauptteil von f in $n \in \mathbb{Z}$ ist $\frac{1}{(z-n)^2}$.
2. Für $|\Im(z)| \rightarrow \infty$ geht $f(z) \rightarrow 0$ bzw. präziser formuliert geht $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+iy)| \rightarrow 0$ für $|y| \rightarrow \infty$ mit $y \in \mathbb{R}$.

Wir suchen nun nach bekannten Funktionen, welche ebenfalls die Eigenschaften des obigen Satzes erfüllen. Diese sind dann sicherlich gute Kandidaten für die von der Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ dargestellte Funktion.

Satz 129: Die Funktion $f(z) := \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2$ genügt den Eigenschaften des vorigen Satzes.

Im folgenden Satz stellen wir nun die bereits zu erkennende Gleichheit des inversen Sinusquadrats und der zuvor betrachteten Reihe genau fest.

Satz 130: Es gilt $\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

7.3.3. Partialbruchentwicklung des Kotangens und Tangens

Betrachte nun die Ableitung $\cot'(z) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\cos}{\sin}\right)'(z) = -\frac{1}{\sin^2(z)}$, dann ist $-\pi \cos(\pi z)$ offenbar eine Stammfunktion von $\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2$.

Satz 131: Es gilt für die Kotangens-Funktion $\pi \cot(\pi z)$ die Partialbruchzerlegung

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Aus dieser Partialbruchentwicklung der Ableitung der Kotangens-Funktion können wir durch die Verschiebung $\cos(\pi z) = \sin\left(\pi\left(z + \frac{1}{2}\right)\right)$ der trigonometrischen Funktionen auch eine Partialbruchentwicklung des reziproken Kosinus-Quadrats in der Form

$$\left(\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(z + n + \frac{1}{2}\right)^2}$$

erhalten. Aus der unendlichen Partialbruchzerlegung des Kotangens lässt sich durch

$$\cot\left[\left(z + \frac{1}{2}\right)\pi\right] = \frac{\cos\left[\left(z + \frac{1}{2}\right)\pi\right]}{\sin\left[\left(z + \frac{1}{2}\right)\pi\right]} = \frac{-\sin(z\pi)}{\cos(z\pi)} = -\tan(z\pi)$$

eine Partialbruchzerlegung bzw. Reihendarstellung des Tangens als

$$\pi \tan(\pi z) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z + n + \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \right) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}$$

finden. Im letzten Schritt wurde von der doppelt unendlichen Reihe jeweils wieder der n -te und $(-n)$ -te Summand, also

$$\left(\frac{1}{z + n + \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \right) + \left(\frac{1}{z - n + \frac{1}{2}} - \frac{1}{-n + \frac{1}{2}} \right) = \dots = \frac{2z}{z^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}$$

und analog fortgesetzt, zusammenfasst. Außerdem gilt die Gleichheit

$$\cot z + \tan z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\cos z}{\sin z} + \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{\sin z \cos z} = \frac{2}{\sin 2z}$$

aus der wir wiederum die Identität

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\sin(\pi z)} &= \pi \cot\left(\frac{\pi z}{2}\right) + \pi \tan\left(\frac{\pi z}{2}\right) = \overbrace{\frac{2}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - n^2}}^{\text{Kotangens}} - \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}}^{\text{Tangens}} \\ &= \frac{2}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4z}{z^2 - (2n)^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4z}{z^2 - (2n+1)^2} \\ &\iff \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2} \end{aligned}$$

erhalten. Durch Addition von $\frac{\pi}{2}$ erhält man daraus wieder die entsprechende Entwicklung des Kosinus.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2} & \left(\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n+\frac{1}{2})^2} \\
\pi \cot(\pi z) &= \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \\
\pi \tan(\pi z) &= \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z+n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - (n+\frac{1}{2})^2} \\
\frac{\pi}{\sin(\pi z)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2} & \frac{\pi}{\cos(\pi z)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - (n+\frac{1}{2})^2}
\end{aligned}$$

Tabelle 7.1.: Übersicht über die hergeleiteten Partialbruch- und Taylor-Entwicklungen.

7.3.4. Bernoulli-Zahlen und die Dirichlet-Reihe

Das Ziel soll es nun sein, eine allgemeine Formel für Reihen der Form $\zeta(2k) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zu gewinnen. $\zeta(z)$ ist in der obigen Definition auch als **Dirichlet-Reihe** bekannt, eine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ als **Riemannsche Zeta-Funktion**. Zur Vorbereitung benötigen wir zunächst noch die Bernoulli-Zahlen. Dazu sei die Funktion

$$g(z) := \frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n-1}}$$

definiert, die einfache Pole bei $2\pi ik$ mit $k \neq 0$ hat. Betrachte allgemein die Rechnung

$$\frac{1}{\frac{1}{a} - 1} = \frac{a - 1 + 1}{1 - a} = -1 + \frac{1}{1 - a} \iff \frac{1}{\frac{1}{a} - 1} + \frac{1}{a - 1} = -1$$

und setze dann $a := e^{-z}$, dann gilt offenbar $\frac{1}{e^{-z}-1} + \frac{1}{e^z-1} = -1$ und $-g(-z) + g(z) = -z$. Sei nun $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die Taylordarstellung, die für $|z| < 2\pi$ konvergiert. Dann gilt

$$-z = g(z) - g(-z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} z^{2n+1},$$

also ist $a_1 = -\frac{1}{2}$ und alle anderen $a_{2n+1} = 0$ für $n \geq 1$. Es gibt also nur **eine ungerade Bernoulli-Zahl**, die nicht verschwindet. Die „nullte“ Bernoulli-Zahl erhält man durch Berechnung von des Grenzwerts $z \rightarrow 0$, was $a_0 = 1$ liefert. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\frac{z}{e^z - 1} &= 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \iff 1 = \left(\frac{e^z - 1}{z}\right) \left(1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}\right) \\
&\iff 1 = \left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots\right) \left(1 - \frac{z}{2} + az^2 + bz^4 + \dots\right).
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten von z^2 sind $0 = a - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \iff a = \frac{1}{12}$, für z^4 gilt $0 = b + \frac{1}{6} \frac{1}{12} - \frac{1}{24 \cdot 2} + \frac{1}{120} \iff b = -\frac{1}{720}$. Verfolgt man dieses **rekursive Prinzip** weiter, so erhält man

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{671}{2730}, \quad \dots$$

Im Allgemeinen sind **alle Bernoulli-Zahlen rational**, da sie aus Summen und Produkten rationaler Zahlen entstehen. Der Konvergenzradius über eine „Bernoulli-Potenzreihe“ $\sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n$ ist beschränkt, da $\sup_{n \in \mathbb{N}} |B_{2n}| = \infty$ gilt, d.h. die **Bernoulli-Zahlen sind unbeschränkt**.

7.3.5. Bernoulli-Zahlen als Kotangens-Taylorkoeffizienten

Um nun mit den Bernoulli-Zahlen zu einer Taylorreihen-Darstellung der Kotangens-Funktion zu gelangen, betrachte noch einmal die Ausgangsfunktion

$$\cot w \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\cos w}{\sin w} = \frac{\frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw})}{\frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw})} = i \frac{e^{2iw} + 1}{e^{2iw} - 1} = i \left(1 + \frac{2}{e^{2iw} - 1} \right)$$

$$\iff w \cot w = iw + \frac{2iw}{e^{2iw} - 1} = iw + g(2iw)$$

mit $g(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$, sodass man schließlich

$$w \cot w = iw + \left(1 - \frac{2iw}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} (2iw)^{2n} \right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} (-1)^n (2w)^{2n}$$

$$\iff \pi z \cot(\pi z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} (-1)^n (2\pi)^{2n} z^{2n}$$

erhält. Andererseits haben wir für $\pi z \cot(\pi z)$ aber auch die Gleichung

$$\pi z \cot(\pi z) = 1 + 2z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - k^2},$$

in Satz 131 hergeleitet, die wir durch Zerlegung der Summanden über die Identität

$$\frac{1}{z^2 - n^2} = -\frac{1}{n^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{n}\right)^2} = -\frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^{2k}$$

auch als geometrische Reihe schreiben können, sodass wir für $\pi z \cot(\pi z)$ damit

$$\pi z \cot(\pi z) = 1 + 2z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^{2k} \right]$$

erhalten. Für $r \in [0, 1[$ und $r = |z|$ folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{n}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{r}{n}\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - r^2} < \infty$$

also konvergiert die Reihe absolut. Nach dem Riemannschen Umordnungssatz dürfen wir dann die Summationsreihenfolge der Glieder vertauschen, womit wird

$$\begin{aligned} \pi z \cot(\pi z) &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^2}{n^2} \left(\frac{z}{n}\right)^{2k} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^{2(k+1)} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{k}\right)^{2n} \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} \right)}_{\zeta(2n)} z^{2n} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{B_{2n} (2\pi)^{2n}}{2(2n)!} z^{2n} \end{aligned}$$

erhalten, wobei wiederum die Gleichheit $\zeta(2n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n} (2\pi)^{2n}}{2(2n)!}$ verwendet wurde.

8. Elliptische Funktionen

Im Folgenden wollen wir nun elliptische Funktionen studieren, um damit Integrale, wie etwa $\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx$, zu berechnen. Umkehrfunktionen sind ein weiteres Beispiel für elliptische Funktionen.

8.1. Gruppentheoretische Vorbereitungen

Dazu werden wir eine leicht abgewandelte Definition einer meromorphen Funktion (vgl. Definition 91 auf Seite 32) verwenden, die aber äquivalent zu der alten Definition ist.

Definition 132: Definiere $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ als **Abschluß der komplexen Zahlen**, dann nennen wir eine Funktion $f : U \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$ mit Polen in der diskreten Menge A , also $f(z) = \infty \in \hat{\mathbb{C}}$ für alle $z \in A$, **meromorph** auf \mathbb{C} , sodass wir auch $f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ schreiben können.

Definition 133: Zu einer beliebigen Funktion f heißt $w \in \mathbb{C}$ die **Periode von f** , falls $f(z + w) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Beispiel: $f(z) := e^z$ hat die Periode $w := 2\pi i$.

Elliptische Funktionen haben mehrere (genauer gesagt zwei) unabhängige Perioden - dies definieren wir später präzise. Wir werden daher nun die gruppentheoretischen Eigenschaften studieren, die damit einhergehen.

Definition 134: Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Teilmenge $\Omega \subset V$ heißt **Untergruppe von V** , falls die folgenden drei Bedingungen gelten:

1. Die Null ist enthalten: $0 \in \Omega$.
2. Additive Inverse sind enthalten: $\omega \in \Omega \implies -\omega \in \Omega$.
3. Summen sind enthalten: $\omega_1, \omega_2 \in \Omega \implies \omega_1 + \omega_2 \in \Omega$.

Folglich bildet - wie der Name schon andeutet - dann die Untergruppe wieder eine neue additive Gruppe.

Satz 135: Sei f meromorph auf \mathbb{C} und nicht konstant. Ω sei die Menge aller Perioden von f . Dann ist Ω eine diskrete Untergruppe von \mathbb{C} .

Satz 136: Jede diskrete Untergruppe Ω eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums V ist abgeschlossen.

Definition 137: Sei $\Omega \subset V$ eine diskrete Untergruppe des endlichdimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum V . Dann sei der **Untergruppen-Rang** $\text{Rang}(\Omega)$ die maximale Anzahl der unter \mathbb{R} linear unabhängigen Elemente Ω , die der Dimension des kleinsten linearen Unterraums von V entspricht, der Ω enthält.

Nachdem wir durch den Rang ein Äquivalent zur Dimension für eine diskrete additive Untergruppe definiert haben, zeigen wir nun, dass es eine „Basis“ aus Elementen gibt, deren ganzzahlige Linearkombinationen gerade die Untergruppe erzeugen.

Beispiel: $\mathbb{Z}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ mit $m \leq n$ hat $\text{Rang}(\mathbb{Z}^m \times \{0\}) = m$.

Satz 138: Sei $\Omega \subset V$ eine diskrete Untergruppe, $\Omega \neq \{0\}$ und V endlichdimensional. Es bezeichne $r := \text{Rang}(\Omega)$. Dann existieren $\omega_1, \dots, \omega_r \in \Omega$, sodass

$$\Omega = \left\{ \sum_{j=1}^r n_j \omega_j : n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z} \right\}$$

gilt, d.h. Ω wird von endlich vielen Elementen durch ganzzahlige Vielfache erzeugt.

8.2. Elliptische Funktionen und ihre Eigenschaften

Nachdem wir nun alle wichtigen Eigenschaften einer diskreten Untergruppe gezeigt haben, können wir allgemein ein Gitter definieren.

Definition 139: Eine diskrete Untergruppe $\Omega \subset V$ mit $\text{Rang}(\Omega) = \dim V_{\mathbb{R}} < \infty$ heißt **Gitter**.

Beispiel: $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Gitter.

Definition 140: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Unter einer **elliptischen Funktion zum Periodengitter** Ω verstehen wir eine meromorphe Funktion f auf \mathbb{C} , sodass $f(z + \omega) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $\omega \in \Omega$ gilt.

Da $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ ist, können wir eine elliptische Funktion auch als „zweidimensional-periodische“ Funktion betrachten, d.h. die Funktion hat zwei verschiedene, linear unabhängige Perioden.

Nun leiten wir einige elementare Eigenschaften elliptischer Funktionen her. Zuerst stellt sich die Frage, welche elliptischen Funktionen wir schon kennen?

Satz 141: Für jede meromorphe Funktion f auf \mathbb{C} sei Ω_f die Menge der Perioden von f . Dann gilt insbesondere

$$\Omega_{\sin} = \Omega_{\cos} = 2\pi\mathbb{Z}, \quad \Omega_{\tan} = \Omega_{\cot} = \pi\mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \Omega_{\exp} = 2\pi i\mathbb{Z},$$

diese Funktionen sind deswegen nicht elliptisch (da nur „eindimensional-periodisch“).

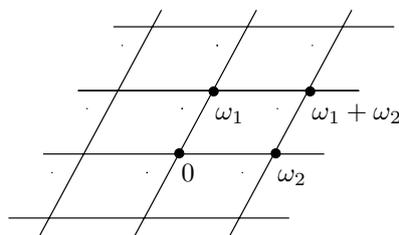


Abbildung 8.1.: 2D-Gitter.

Von jetzt an wähle das Gitter $\Omega \subset \mathbb{C}$ mit dem Erzeugendensystem $\{\omega_1, \omega_2\}$, d.h. es gilt $\Omega = \{m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$. f elliptisch bedeutet hier $f(z + \omega) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $\omega \in \Omega$.

Satz 142: Jede auf \mathbb{C} holomorphe elliptische Funktion ist konstant.

Folglich kommen als „interessante“ elliptische Funktionen nur noch meromorphe Funktionen mit unendlich vielen Singularitäten in Betracht und nach Satz 92 sind diese dann insbesondere nicht rational.

Satz 143: Sei $P := \{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 : t_1, t_2 \in [0, 1]\}$ ein halboffener Gitterquadrant und f eine elliptische Funktion mit den Polen $a_1, \dots, a_k \in P$. Dann ist

$$\sum_{j=1}^k \operatorname{res}_{a_j}(f) = 0 .$$

Korollar 144 (Liouville für elliptische Funktionen): Hat f im halboffenen Gitterquadranten P höchstens einen einfachen Pol, dann ist die Funktion f konstant.

Definition 145: Eine w -Stelle von f mit der Vielfachheit $k \geq 1$ ist eine Nullstelle der Differenzfunktion $f - w$ der Ordnung k .

Satz 146: Falls f eine nicht konstante elliptische Funktion und $c \in \mathbb{C}$ ist, dann gilt

$$\# \{\text{Pole von } f \text{ in } P\} = \# \{c\text{-Stellen von } f \text{ in } P\}$$

für $P := \{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 : t_1, t_2 \in [0, 1]\}$, jeweils mit Vielfachheit gezählt.

8.3. Die Weierstraßsche elliptische Funktion

8.3.1. Konstruktion und Laurent-Entwicklung

Gibt es denn nun überhaupt irgendwelche elliptische Funktionen? Holomorphe Funktionen haben wir bereits ausgeschlossen und es verbleiben nur noch meromorphe Funktionen, die nicht rational sind. Mit der im letzten Kapitel besprochenen unendlichen Partialbruchzerlegung werden wir nun eine elliptische Funktion konstruieren und später dann zeigen, dass diese Wahl sehr natürlich ist. Betrachten wir dazu die Reihe

$$f(z) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z - \omega)^k}$$

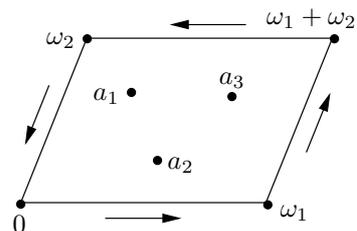


Abbildung 8.2.: Gitterquadrant.

für ein passendes $k \in \mathbb{N}$. Zunächst kümmern wir uns um das Konvergenzverhalten dieser Reihe.

Lemma 147: Die Reihe $\sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega|^s} < \infty$ konvergiert genau dann, wenn $s > 2$ ist.

Satz 148: Für $k \geq 3$ konvergiert die Reihe $\sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z - \omega)^k}$ gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen von $\mathbb{C} \setminus \Omega$ und stellt zugleich eine elliptische Funktion dar.

Wir sind mit der Reihe also schon nahe an einer brauchbaren Lösung, aber noch nicht ganz. Zunächst gilt für die Ableitung dieser Funktion gilt nach den elementaren Differentiationsregeln

$$\frac{d}{dz} \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z - \omega)^k} = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{d}{dz} (z - \omega)^{-k} = \sum_{\omega \in \Omega} -k(z - \omega)^{-k-1} = -k \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z - \omega)^{k+1}} .$$

Für Ableitung des Falls $k = 2$ sind alle Residuen von $-2 \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z - \omega)^3}$ gleich Null, also hat diese Funktion eine Stammfunktion, die wir $\wp(z)$ nennen - die **Weierstraßsche elliptische Funktion**. Allerdings haben wir zwei Schwierigkeiten:

1. Wir müssen eine andere Formel für \wp finden, denn $\sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z - \omega)^2}$ konvergiert nicht absolut.

2. Wir müssen explizit zeigen, dass die Stammfunktion $\wp(z)$ elliptisch ist.

Ist eine Funktion f elliptisch, so auch ihre Ableitung f' . Dazu betrachte einfach

$$\wp'(z + \omega) - \wp'(z) = \frac{d}{dz}(\wp(z + \omega) - \wp(z)) = 0 ,$$

dann folgt wegen dem Zusammenhang von $\mathbb{C} \setminus \Omega$, dass $\wp(z + \omega) - \wp(z) = C_\omega$ konstant sein muss.

Satz 149: Die Weierstraßsche elliptische Funktion $\wp(z)$, definiert durch die Reihe

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) ,$$

ist eine elliptische Funktion.

Als nächstes wollen wir nun zeigen, dass das **Ableitungsquadrat** $(\wp'(z))^2$ ein **kubisches Polynom in $\wp(z)$** ist.

Satz 150: Es gilt für die Ableitung der Weierstraßschen elliptischen Funktion

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z))^3 - g_2\wp(z) - g_3 ,$$

wobei die **Weierstraßschen Invarianten** g_2 und g_3 über das Gitter Ω gegeben sind durch

$$g_2 := 60 \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4} \quad \text{und} \quad g_3 := 140 \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6} .$$

8.3.2. Alternativer Zugang durch Differentialgleichungen

Wir können die soeben bewiesene Beziehung zwischen der Weierstraßschen elliptischen Funktion $\wp(z)$ und ihrer Ableitung auch als Differentialgleichung auffassen, zu der dann gerade \wp die Lösung ist. Zunächst beweisen wir jetzt den folgenden Darstellungssatz.

Satz 151: Es gilt $(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)$. Die $e_j := \wp(\rho_j)$ sind die Funktionswerte der Nullstellen ρ_j der Ableitung $\wp'(z)$ im üblichen Gitterquadranten.

Damit haben wir die zweite Form der Weierstrass-Differentialgleichung bewiesen. Mit ihr erhalten wir die folgenden Beziehungen zwischen den elliptischen Invarianten g_2 und g_3 sowie den Funktionswerten e_j .

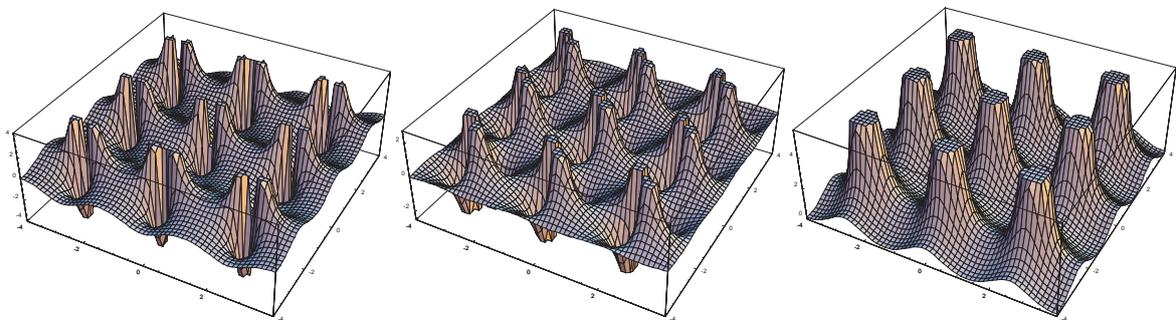


Abbildung 8.3.: Plot des Real- und Imaginärteiles sowie des Absolutbetrags der Weierstraßschen elliptischen Funktion für die Invarianten $g_2 = 4$ und $g_3 = 0$.

Korollar 152: Es gilt $4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3) = 4z^3 - g_2z + g_3$ für alle z , was zu $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, $4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) = -g_2$ und $4e_1e_2e_3 = g_3$ äquivalent ist.

Definition 153: Von einem Polynom $p(z) := (z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_k)$ ist die **Diskriminante** als das Produkt $\Delta := \prod_{j < k} (\lambda_j - \lambda_k)^2$ definiert.

Beispiel: Sei $p(z) := z^2 + az + b = (z - \lambda_+)(z - \lambda_-)$ mit $\lambda_{\pm} := \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$, sodass für die Differenz $\lambda_+ - \lambda_- = \sqrt{a^2 - 4b}$ und damit $\Delta = (\lambda_+ - \lambda_-)^2 = a^2 - 4b$ folgt.

Proposition 154: Für $p(z) := z^3 + az + b$ ist die Diskriminante $\Delta = -4a^3 - 27b^2$. □

Korollar 155: Für das Polynom $z^3 - \frac{g_2}{4}z - \frac{g_3}{4}$ ist $\Delta \neq 0$, also wegen $0 \neq 4(-\frac{g_2}{4}) + 27(-\frac{g_3}{4})^2$ dann $g_2^3 \neq 27g_3^2$. □

8.3.3. Elliptischer Funktionen als rationale Weierstraß-Funktionen

Der folgende Satz liefert nun eine wichtige Eigenschaft elliptischer Funktionen, welche die Bedeutung der Weierstraßschen elliptischen Funktion unterstreicht.

Satz 156 (Form elliptischer Funktionen): Jede elliptische Funktion ist eine rationale Funktion von \wp und \wp' .

8.4. Elliptische Funktionen von elliptischen Integralen

Nehme an, dass $\omega_1 \in \mathbb{R}$ und $\omega_2 \in i\mathbb{R}$ sind. Dann ist ein ω genau dann im Gitter Ω , wenn auch $\bar{\omega} \in \Omega$ gilt. Für dieses spezielle Gitter folgt dann für die Weierstraßsche elliptische Funktion

$$\begin{aligned} \wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \\ \implies \overline{\wp(z)} &= \frac{1}{\bar{z}^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(\bar{z} - \bar{\omega})^2} - \frac{1}{\bar{\omega}^2} \right) = \wp(\bar{z}). \end{aligned}$$

Also ist $\wp(x) \in \mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}$. Nun wissen wir, dass die Nullstellen der Ableitung \wp' in P die Punkte $\rho_1 := \frac{\omega_1}{2}$, $\rho_2 := \frac{\omega_2}{2}$ und $\rho_3 := \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ sind, wobei wir wieder $e_j := \wp(\rho_j)$ setzen. Insbesondere ist $\wp'(x) \neq 0$ wenn $x \in]0, \frac{\omega_1}{2}[$ gilt.

Da die Weierstraß-Funktion \wp in Null einen Pol hat, gilt $\wp(x) \rightarrow \infty$ wenn $x \rightarrow 0$ läuft. Für $x \in]0, \frac{\omega_1}{2}[$ ist also $\wp'(x) < 0$. Aus der strengen Monotonie folgt dann die lokale Darstellung

$$\wp'(x) = -\sqrt{4(\wp(x))^2 - g_2\wp(x) - g_3}.$$

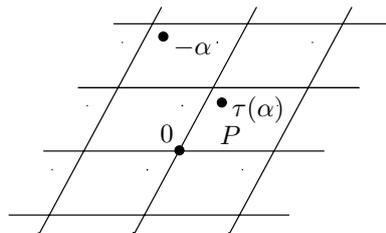


Abbildung 8.4.: Die τ -Gitter-Funktion des Beweises.

8. Elliptische Funktionen

Die Einschränkung $\wp|_{]0, \frac{\omega_1}{2}[} :]0, \frac{\omega_1}{2}[\rightarrow]e_1, \infty[$ ist fallend und bijektiv. Sei $g :]e_1, \infty[\rightarrow]0, \frac{\omega_1}{2}[$ die zugehörige inverse Funktion. Für $u \in]e_1, \infty[$ und $x := g(u)$ gilt dann

$$g'(u) = \frac{1}{\wp'(x)} = -\frac{1}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}} = g(b) - g(a) .$$

Nach dem Lehrbuch von Fischer & Lieb sind für jedes reelle Polynom vom Grad 3 oder 4 mit getrennten Nullstellen die Umkehrfunktionen von $\int \frac{1}{\sqrt{P(x)}} dx$ Einschränkungen von elliptischen Funktionen.

9. Geometrische Funktionentheorie und biholomorphe Abbildungen

Nachdem wir in den vorigen Kapiteln viele Ergebnisse durch technische Manipulationen erlangt haben, werden wir diese nun geometrisch interpretieren. Der entscheidende Schritt dabei ist, dass wir uns von der Vorstellung der komplexen Zahlenebene lösen und stattdessen die Riemannsche Zahlenkugel untersuchen. Auf ihr untersuchen wir dann die Wirkung linearer Transformationen - nicht zu verwechseln mit linearen Abbildungen!

9.1. Von der Zahlenebene zur Zahlenkugel

Zuerst konstruieren wir nun diese Zahlenkugel. Dazu fügen wir in die komplexe Zahlenebene den fehlenden ∞ -Punkt ein, mit dem wir meromorphe Funktionen, wie schon im vorigen Kapitel, eleganter darstellen können.

Definition 157: Betrachte $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ als Menge. Seien $a_j : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ mit $j = 0, 1$ durch

$$\alpha_0(z) := z \quad \text{und} \quad \alpha_1(z) := \begin{cases} \frac{1}{z} & : z \neq 0 \\ \infty & : z = 0 \end{cases}$$

definiert. Eine Teilmenge $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ heißt **offen**, falls die beiden Urbilder $a_j^{-1}(U) \subset \mathbb{C}$ für $j = 0, 1$ offen sind. Dies definiert eine **Topologie auf $\hat{\mathbb{C}}$** .

Eine offene Umgebung von ∞ ist somit eine Menge der Form $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$, wobei $K \subset \mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$ kompakt ist. Es gilt daher die Zerlegung $\hat{\mathbb{C}} = \alpha_0(\overline{D}) \cup \alpha_1(\overline{D})$, wobei \overline{D} der Abschluss der offenen Einheitskreisscheibe $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ist.

Betrachte nun die **stereographische Projektion** $\varphi : S^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Ist N der Nordpol der S^2 , dann setze $\varphi(N) := \infty$. Formal ist die Projektionsabbildung durch

$$\varphi : S^2 \setminus \{N\} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{1}{1-x_3}(x_1 + ix_2)$$

gegeben. Betrachtet man das Betragsquadrat dieser Abbildung im Nordpol, so gilt

$$|\varphi(x)|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_3)^2} = \frac{1-x_3^2}{(1-x_3)^2} = \frac{1+x_3}{1-x_3} \rightarrow \infty$$

für $x \rightarrow N$, und damit folgt die Stetigkeit von φ im Nordpol N , also ist φ überall stetig. Man kann leicht zeigen, dass φ auch bijektiv und φ^{-1} ebenfalls stetig ist, also ist φ ein Homöomorphismus zwischen der 2-Sphäre und dem Abschluss der komplexen Ebene $\hat{\mathbb{C}}$.

Definition 158: Durch die Umkehrung der Projektion erhalten wir die sogenannte **Riemannsche Zahlenkugel**.

Betrachte nun die $\frac{1}{z}$ -Inversionsabbildung, die wir durch

$$z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z} & : z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \infty & : z = 0 \\ 0 & : z = \infty \end{cases}$$

auf $\hat{\mathbb{C}}$ erweitern. Bei dieser Definition ist $\frac{1}{z}$ eine bijektive Selbstabbildung $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, bei der die zwei Hemisphären der Riemannschen Zahlenkugel vertauscht werden, bzw. präziser ausgedrückt eine 180° -Rotation um die Achse durch ± 1 geschieht.

9.2. Lineare Transformationen

Wir werden nun Funktionen der Form $f(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ und c, d nicht beide Null betrachten. f ist hier genau dann konstant, wenn $ad - bc = 0$ ist, also die Determinante der Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ verschwindet.

Definition 159: Sind $ad - bc \neq 0$, dann heißt $f(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ **lineare Transformation** oder auch **Möbius-Transformation**.

Wir nehmen ab jetzt stets an, dass $ad - bc \neq 0$ gilt.

9.2.1. Grundlegende Eigenschaften und Gruppenstruktur

Satz 160: Jede lineare Transformation definiert einen Homöomorphismus $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$.

Definition 161: Die Menge $GL_2(\mathbb{C}) := \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) : \det A \neq 0\}$ enthält alle 2×2 -Matrizen, die invertierbar sind.

Für eine Matrix $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ setze $f_A(z) := \frac{az+b}{cz+d}$.

Satz 162: Für die von Matrizen $A_1, A_2 \in GL_2(\mathbb{C})$ induzierten linearen Transformationen gelten die folgenden Zusammensetzungsregeln:

1. $f_{A_1 A_2}(z) = f_{A_1} \circ f_{A_2}(z)$.
2. $f_{A_1} = f_{A_2} \iff$ es gibt ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\lambda A_1 = A_2$.

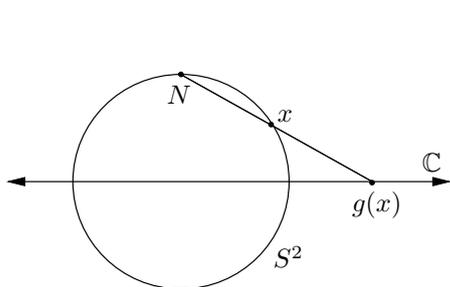


Abbildung 9.1.: Eindimensionale Darstellung der stereographischen Projektion.

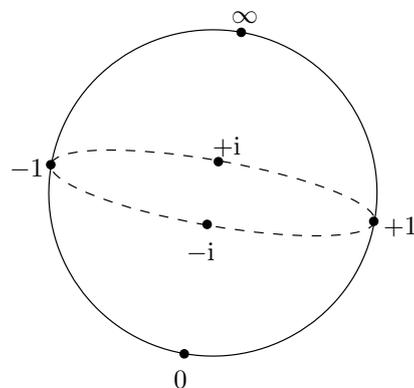


Abbildung 9.2.: Die Riemannsche Zahlenkugel.

9.2.2. Fixpunkte, Eindeutigkeit und Konstruktion

Satz 163 (Fixpunkte): Sei $f(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc \neq 0$ nicht identisch der Identität. Dann hat die Selbstabbildung $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ genau einen oder zwei Fixpunkte.

Korollar 164 (Eindeutigkeit): Eine lineare Transformation $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ ist durch Angabe der Bilder dreier verschiedener Punkte in $\hat{\mathbb{C}}$ eindeutig bestimmt.

Mit der Eindeutigkeit und den Fixpunkten zeigen wir nun in zwei Schritten, dass wir durch Vorgabe von drei Punkten eine lineare Abbildung vollständig spezifizieren können.

Lemma 165: Seien $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ verschieden. Dann existiert genau eine lineare Transformation S mit $S(z_1) = 0$, $S(z_2) = 1$ und $S(z_3) = \infty$.

Den im Beweis eingeführten Begriff notieren wir im weiteren Verlauf folgendermaßen.

Definition 166: In der Notation des vorigen Satzes definieren wir das **Doppelverhältnis** als $DV(z; z_1, z_2, z_3) = S(z)$ für $z \in \hat{\mathbb{C}}$ mit der Abbildung S aus dem Satz.

Damit können wir nun den Existenzsatz einer linearen Transformation ein wenig verallgemeinern.

Satz 167 (Existenz): Sind (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) zwei Tripel verschiedener Punkte in $\hat{\mathbb{C}}$, so existiert genau eine lineare Transformation S mit $S(z_j) = w_j$ für $j = 1, 2, 3$.

Interessanterweise ist das Doppelverhältnis invariant unter linearen Transformationen, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 168: Seien $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ verschieden und $z \in \hat{\mathbb{C}}$. Dann gilt für alle linearen Transformationen S die Gleichheit $DV(z; z_1, z_2, z_3) = DV(S(z); S(z_1), S(z_2), S(z_3))$.

9.3. Spezielle Typen linearer Transformationen

Nachdem wir nun eine Sammlung von allgemeingültigen Aussagen für lineare Transformationen haben, betrachten wir im Weiteren die drei folgenden lineare Transformationen

1. Drehstreckung: $z \mapsto \alpha z$
2. Translation: $z \mapsto z + b$
3. Inversion: $z \mapsto \frac{1}{z}$

9.3.1. Zerlegung in Drehstreckung, Translation und Inversion

Wir der nächste Satz zeigt, erhalten wir allein aus diesen drei Abbildung bereits durch Kombination sämtliche linearen Transformationen.

Satz 169: Jede lineare Transformation ist eine Zusammensetzung von Drehstreckung, Translation und Inversion.

Nun kommen wir zu der entscheidenden geometrischen Interpretation der linearen Transformationen.

Satz 170: Lineare Transformationen führen Geraden und Kreislinien in Geraden und Kreislinien über, wobei hier eine Gerade hier die Punktmenge $\{\text{Gerade in } \mathbb{C}\} \cup \{\infty\}$ bezeichnet.

Beispiel: Die komplexe Gerade $G := \{\frac{1}{2} + iy : y \in \mathbb{R}\}$ wird von $z \mapsto \frac{1}{z}$ auf den Kreis $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ abgebildet.

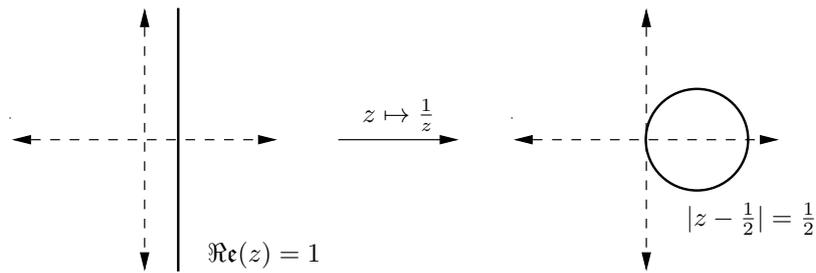


Abbildung 9.3.: Beispiel für die Überführung einer Geraden in einen Kreis.

9.3.2. Geometrische Interpretation

Korollar 171: Durch drei verschiedene Punkte $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ geht genau eine Kreislinie oder Gerade.

Satz 172: Sei K die Gerade bzw. Kreislinie durch drei verschiedene Punkte $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ und $T(z) = DV(z; z_1, z_2, z_3)$, dann gilt $T(K) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Sei $H_{\pm} := \{z \in \mathbb{C} : \pm \Im(z) > 0\}$ die obere oder untere Halbebene. In der Situation des vorigen Satzes sind $T^{-1}(H_{\pm})$ die Zusammenhangskomponenten von $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$.

Beispiel: Finde eine lineare Transformation T , die den Kreis $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ auf die obere Halbebene H_+ abbildet. Wähle dazu die drei Punkte $z_1 := 1, z_2 := i$ und $z_3 := -1$ im Rand von D , dann gilt

$$T(z) := DV(z, 1, i, -1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\begin{pmatrix} z-1 \\ z+1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} i-1 \\ i+1 \end{pmatrix}} = i \frac{1-z}{1+z}$$

und wegen $T(\partial D) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ bildet T die Kreisscheibe D entweder in die obere oder untere Halbebene ab. Wählen wir nun etwa $0 \in D$, dann gilt $T(0) = i \in H_+$, also bildet die Abbildung in die obere Halbebene ab. Darüber hinaus definiert T außerdem eine biholomorphe Abbildung.

9.4. Die Automorphismengruppe

9.4.1. Holomorphe, meromorphe und biholomorphe Abbildungen

In Definition 157 auf Seite 57 hieß eine Teilmenge $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ offen, falls entweder $U \subset \mathbb{C}$ offen oder $U = \hat{\mathbb{C}} \setminus K$ mit $K \subset \mathbb{C}$ kompakt ist.

Definition 173: Sei $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ offen. Eine Abbildung $f : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ heißt **holomorph in $\hat{\mathbb{C}}$** , falls für alle $z_0 \in U$ gelten:

1. Falls $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f(z_0) \in \mathbb{C}$, so ist $f(z)$ holomorph um z_0 .
2. Falls $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f(z_0) = \infty$, so ist $\frac{1}{f(z)}$ holomorph um z_0 .
3. Falls $z_0 = \infty$ und $f(z_0) \in \mathbb{C}$, so ist $f(\frac{1}{z})$ holomorph um 0.
4. Falls $z_0 = \infty$ und $f(z_0) = \infty$, so ist $\frac{1}{f(\frac{1}{z})}$ holomorph um 0.

Diese Definition ist zwar nicht sehr elegant, aber es lässt sich einfacher damit arbeiten.

Satz 174: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine meromorphe Funktion auf U ist dasselbe wie eine holomorphe Funktion $f : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, wo $f^{-1}(\infty)$ diskret ist.

Satz 175: Die holomorphen Abbildungen $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ sind genau die rationalen Funktionen.

Definition 176: Seien $U, V \subset \hat{\mathbb{C}}$ offen. Eine bijektive Abbildung $f : U \rightarrow V$ heißt **biholomorph** oder **konform**, falls f und f^{-1} beide holomorph sind.

9.4.2. Die Gruppe der Selbstabbildungen und linearen Transformationen

Wir betrachten nun, wie die Gruppe der Automorphismen auf der Riemannschen Zahlen, der Halbebene und der Einheitskreisscheibe aussieht.

Definition 177: Die **Gruppe der Selbstabbildungen** bzw. **Automorphismengruppe** sei $\text{Aut}(U) = \{\text{Biholomorphe Abbildungen } U \rightarrow U\}$.

Satz 178: Für die Gruppe der Selbstabbildungen gelten folgende Eigenschaften:

1. Auf \mathbb{C} ist $\text{Aut}(\mathbb{C})$ die Gruppe der affin-linearen Abbildung $z \mapsto az + b$.
2. Auf $\hat{\mathbb{C}}$ ist $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ die Gruppe der linearen Transformationen.

Nun zu der Automorphismengruppe der Einheitskreisscheibe. Dazu benötigen wir die Aussagen des folgenden Satzes.

Satz 179 (Schwarz): Sei $f : D \rightarrow D$ holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$. Dann gelten

1. $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in D$,
2. $|f'(0)| \leq |1| = 1$.

Gilt statt kleiner gleich in den obigen Abschätzungen explizit die Gleichheit, also $|f(z)| = |z|$ und $|f'(0)| = 1$ für irgendein $z \in D$, so ist f eine Rotation $f(z) = \lambda z$.

Für alle $\alpha \in D$ setzen wir im Folgenden $\varphi_\alpha(x) := \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$.

Lemma 180: φ_α ist eine lineare Transformation mit $\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_{-\alpha}$, die auf der Einheitskreisscheibe durch $\varphi_\alpha(D) = D$ und auf dem Rand wegen $\varphi_\alpha(\partial D) = \partial D$ eine Involution ist.

Satz 181: Die Gruppe der Selbstabbildungen $\text{Aut}(D)$ besteht aus allen Abbildungen der Form $f(z) := \lambda \varphi_\alpha(z)$ mit $|\lambda| = 1$ und $|\alpha| < 1$.

Zuletzt betrachten wir nun noch die Selbstabbildungen der oberen und unteren Halbebene, die sich ebenfalls mithilfe von linearen Transformationen vollständig spezifizieren lassen.

Satz 182: Sei $H_\pm := \{z : \pm \Im m(z) > 0\}$. Dann besteht $\text{Aut}(H_\pm)$ aus allen linearen Transformationen der Form $T(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $ad - bc > 0$.

9.5. Vorbereitungen zum Riemannsche Abbildungssatz

Wir kommen nun zum krönenden Satz der Funktionentheorie innerhalb der komplexen Zahlenebene - dem Riemannschen Abbildungssatz. Bevor wir diesen allerdings beweisen, werden wir zuerst noch einige Vorbereitungen benötigen.

Sei X ein **metrischer Raum** mit der **Metrik** d , z.B. $X \subset \mathbb{R}^n$ mit $d(x, y) = \|x - y\|$, und F eine **Familie von Funktionen** $X \rightarrow \mathbb{C}$.

Definition 183: Die Funktionen-Familie F heißt **gleichgradig stetig**, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$ und für alle $f \in F$ gilt, dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, jedes f ist also gleichmäßig stetig.

Definition 184: Die Funktionen-Familie F heißt **punktweise beschränkt**, wenn $\sup_{f \in F} |f(x)| < \infty$ für alle $x \in X$ gilt.

Das Bindeglied zwischen gleichgradig stetigen Funktionen-Familien und den enthaltenen gleichmäßig konvergenten Folgen liefert der folgende Satz.

Satz 185 (Arzela-Ascoli): Sei F eine punktweise beschränkte und gleichgradig stetige Familie von komplexen Funktionen auf einem kompakten metrischen Raum X . Nehme an, dass X eine dichte abzählbare Teilmenge E enthält, d.h. X ist separabel. Dann hat jede Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in F eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.¹

Neben dem Satz von Arzela-Ascoli benötigen wir noch eine zweite Konvergenzaussage, die lokal gleichmäßige Konvergenz aus lokaler Beschränktheit folgert.

Definition 186: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $\{f_n\}$ eine Folge von Funktion. **Lokal beschränkt** bedeutet, dass für alle kompakten $K \subset U$ ein $M < \infty$ existiert, sodass $|f_n(x)| < M$ für alle $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Satz 187 (Montel): Sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf $U \subset \mathbb{C}$ offen. Dann besitzt $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Lemma 188: Sei $B \subset \mathbb{C}$ eine abgeschlossene Kreisscheibe und U eine offene Umgebung von B . Außerdem seien $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ holomorphe Funktionen auf U , die lokal gleichmäßig gegen f konvergieren, die Grenzfunktion f ist also auch holomorph. Falls $f \neq 0$ auf dem Rand ∂B ist, dann gilt für n hinreichend groß:

1. Es ist $f_n \neq 0$ auf dem Rand ∂B .
2. f und f_n haben dieselbe Anzahl von Nullstellen in B .

Lemma 189: Es sei $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe. Ist $F : D \rightarrow D$ holomorph und nicht injektiv, dann ist $|F'(0)| < 1$.

9.6. Der Riemannsche Abbildungssatz

Der Riemannsche Abbildungssatz beantwortet im Grunde nichts anderes, als die Frage, welche Gebiete $G \subset \mathbb{C}$ sich biholomorph auf die Einheitskreisscheibe D abbilden lassen. Das verblüffende Ergebnis Riemanns findet sich in den sehr schwachen Voraussetzungen des Satzes, der Situationen wie in Abbildung 9.4 zulässt.

¹Eine leicht abgewandelte Formulierung dieses Satzes findet sich im Skript über Differentialgleichungen.

Satz 190 (Riemannscher Abbildungssatz): Sei G ein nichtleeres Gebiet in \mathbb{C} , dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Entweder ist $G = \mathbb{C}$ oder es gibt eine biholomorphe Abbildung $h : G \rightarrow D$.²
2. Das Gebiet G ist einfach zusammenhängend.
3. Für jede holomorphe Funktion f auf G ohne Nullstellen gibt es eine holomorphe Funktion g auf G mit $g^2 = f$.

Eine alternative Teilformulierung des Satzes lautet: Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \neq \mathbb{C}$ in der komplexen Ebene \mathbb{C} lässt sich biholomorph auf die Einheitskreisscheibe abbilden.

Beispiel: Betrachten wir einige Beispiele biholomorpher Abbildungen:

1. $z \mapsto z^3$ bildet $\{x + iy : x, y > 0\}$ auf $\{x + iy : x < 0 \text{ oder } y > 0\}$ ab.
2. $z \mapsto i \frac{1-z}{1+z}$ bildet $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ auf $\{x + iy : y > 0\}$ ab.
3. $z \mapsto \tan z$ bildet $\{x + iy : |x| < \frac{\pi}{4}\}$ auf $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ab.
4. $z \mapsto \wp(z)$ bildet $\{x + iy : x \in]0, \frac{\omega_1}{2}[, y \in]0, \frac{\omega_2}{2}[\}$ auf $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) < 0\}$ ab.

9.7. Harmonische Funktionen

9.7.1. Definition und elementare Eigenschaften

Ganz am Anfang hatten wir „Cauchy-Riemann-Operatoren“ durch

$$\partial \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad \bar{\partial} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

definiert. Für reell-differenzierbare Funktionen $f := g + ih$, wobei g und h reellwertig sind, folgen dann die Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$f \text{ holomorph} \iff \bar{\partial}f = 0 \iff f_y = if_x \iff \left\{ \begin{array}{l} g_x = h_y \\ g_y = -h_x \end{array} \right\},$$

wobei wir f_x als Kurznotation für $\frac{\partial f}{\partial x}$ gebrauchen.

²An dieser Stelle bedenke man, dass eine holomorphe Abbildung $G = \mathbb{C} \rightarrow D$ eine ganze beschränkte Abbildung und nach dem Satz von Liouville damit konstant (also insbesondere nicht biholomorph) ist.

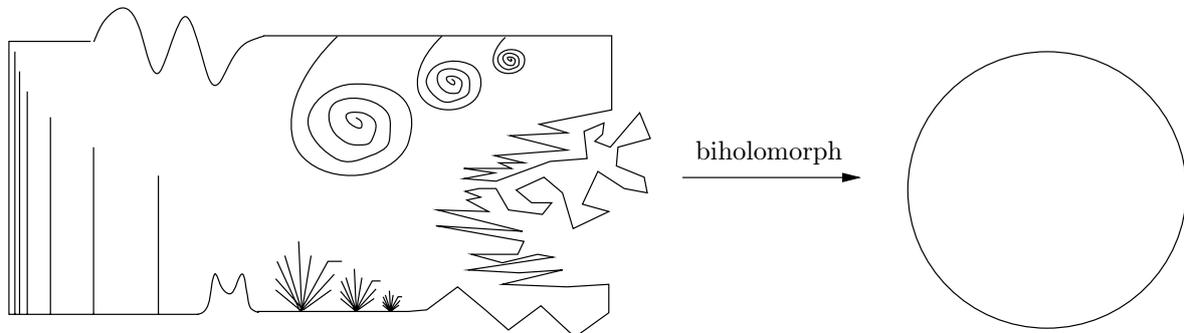


Abbildung 9.4.: Es ist kaum vorstellbar, dass dieses einfach zusammenhängende Gebiet sogar biholomorph (also winkel- und orientierungstreu) auf die Einheitskreisscheibe abbildbar ist.

Satz 191: Für den Laplace-Operator auf \mathbb{C} gilt $4\partial\bar{\partial} = \Delta = 4\bar{\partial}\partial$.

Definition 192: Eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(U)$ heißt **harmonisch**, falls $\Delta f = 0$ gilt.

Satz 193: Ist $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, dann ist f genau dann harmonisch, wenn $\Re(f)$ und $\Im(f)$ harmonisch sind.

Beispiel: 1. Die komplexe Konjugation $f(z) := \bar{z}$ ist harmonisch, aber nicht holomorph, ähnliches gilt für Polynome von \bar{z} .

2. Betrachte $f(z) := \log|z|$ für $z \neq 0$, also $f(x + iy) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
Es folgt

$$f_x = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad f_{xx} = \frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = -f_{yy},$$

also ist $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0$ und f somit harmonisch.

Stellen wir uns nun folgende Frage: Falls $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch ist, gibt es dann eine holomorphe Funktion f auf U mit $u = \Re(f)$. Wenn ja, dann heißt $\Im(f)$ eine **zu u harmonisch konjugierte Funktion**.

Satz 194: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch. Dann existiert eine holomorphe Funktion f auf U mit $\Re(f) = u$.

Korollar 195: Jede harmonische Funktion ist beliebig oft stetig differenzierbar.

Satz 196: Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen und $g : V \rightarrow U$ holomorph. Außerdem sei $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch. Dann ist die Komposition $u \circ g : V \rightarrow \mathbb{R}$ auch harmonisch.

Satz 197: Sei G ein Gebiet, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. G ist homöomorph zur Einheitskreisscheibe $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
2. G ist einfach zusammenhängend.
3. Jede holomorphe Funktion auf G besitzt eine Stammfunktion.
4. Für jedes holomorphe $f : G \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es eine holomorphe Funktion $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f = e^g$.
5. Für jedes holomorphe $f : G \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es eine holomorphe Funktion $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f = g^2$.
6. Jede harmonische Funktion $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ ist der Realteil einer holomorphen Funktion auf dem Gebiet G .

Beispiel: Betrachte $u(z) := \log|z|$ für $z \neq 0$, dann ist u harmonisch, aber nicht der Realteil einer holomorphen Funktion, denn sonst wäre $z = e^{g(z)}$ für $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, was zu einem Widerspruch führt.

Satz 198: Harmonische Funktionen haben die Mittelwerteigenschaft.

Korollar 199: Sei G ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch. Falls f ein lokales Maximum oder Minimum in G hat, so ist f konstant. \square

Satz 200: Sei G ein Gebiet und \bar{G} kompakt, also G relativ kompakt. Falls $u_j : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, die Einschränkung $u_j|_G$ auf das Innere harmonisch und die Differenz $(u_1 - u_2)|_{\partial G} = 0$ auf dem Rand ist, so folgt $u_1 \equiv u_2$.

9.7.2. Das Dirichlet-Problem, Poisson-Integrale und Fourier-Transformation

Was passiert nun, wenn u stetig auf \overline{G} und harmonisch auf G ist? Lässt sich dann u mittels der Einschränkung $u|_{\partial G}$ explizit ausdrücken? Oder falls $f : \partial G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist, gibt es dann eine stetige Funktion $u : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $u|_{\partial G} = f$ und $u|_G$ harmonisch (Dirichlet-Problem)?

Sei $G = D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f : \partial D = S^1 \rightarrow \mathbb{C}$. Betrachte zuerst $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n \neq 0$ für nur endlich viele n , d.h. f sei ein Laurent-Polynom. Für $|z| = 1$ ist $z^{-1} = \bar{z}$, also können wir

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \underbrace{\sum_{n \geq 0} a_n z^n}_{\text{holomorph}} + \underbrace{\sum_{n < 0} a_n \bar{z}^{|n|}}_{\text{antiholomorph}}$$

darstellen, wobei die erste Summe eine holomorphe Funktion, die zweite wegen der Konjugation eine antiholomorphe Funktion darstellt. Dabei gelten die Äquivalenzen

$$g \text{ holomorph} \iff \bar{\partial}g = 0 \quad \text{und} \quad g \text{ antiholomorph} \iff \partial g = 0 .$$

Die Koeffizienten der Reihe sind für $\gamma(t) := e^{it}$ durch $\overbrace{\int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt}^{\text{Fourier-Transformation}}$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{(1+n)it}} i e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt = \tilde{f}(n)$$

gegeben, wobei a_n der n -te Fourier-Koeffizient von f ist. Für $z := r e^{ix}$ mit $r \in [0, 1[$ und $x \in \mathbb{R}$ folgt

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{n < 0} a_n \bar{z}^{|n|} &= \sum_{n \geq 0} a_n r^n e^{inx} + \sum_{n < 0} a_n r^{|n|} e^{inx} = \sum_n a_n r^{|n|} e^{inx} \\ &= \sum_n \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt \right] \cdot r^{|n|} e^{inx} = \sum_n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) r^{|n|} e^{in(x-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \sum_n r^{|n|} e^{in(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) P_r(x-t) dt , \end{aligned}$$

wobei $P_r(x-t)$ der sogenannte **Poisson-Kern** ist.

Definition 201: Für $r \in [0, 1[$ und $s \in \mathbb{R}$ definiere $P_r(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{ins}$ als den **Poisson-Kern**.

Wir können den Poisson-Kern noch ein wenig umformen:

$$\begin{aligned} P_r(s) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{ins} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{ins} + e^{-ins}) = 1 + 2 \Re \left(\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{ins} \right) \\ &= 1 + 2 \Re \left(\frac{r e^{is}}{1 - r e^{is}} \right) = \Re \left(\frac{1 + r e^{is}}{1 - r e^{is}} \right) \stackrel{w := r e^{is}}{=} \Re \left(\frac{1 + w}{1 - w} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + w}{1 - w} + \frac{1 + \bar{w}}{1 - \bar{w}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1 - \bar{w} + w - |w|^2) + (1 - w + \bar{w} - |w|^2)}{|1 - w|^2} = \frac{1 - |w|^2}{|1 - w|^2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - r^2}{|1 - r e^{is}|^2} > 0 . \end{aligned}$$

Also ist der **Poisson-Kern stets größer als Null**. Wir erhalten die folgende interessante Aussage:

Satz 202: Sei $f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ ein Laurent-Polynom. Dann gilt für $|z| < 1$

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{n < 0} a_n \bar{z}^{|n|} = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \Re \left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) dt}_{\text{Poisson-Integral}} .$$

Definition 203: Für jedes stetige $f : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$ definiere $P[f] : \bar{D} \rightarrow \mathbb{C}$, das **Poisson-Integral von f** , durch

$$P[f](z) = \begin{cases} f(z) & : |z| = 1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \Re \left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) dt & : |z| < 1 \end{cases} .$$

Satz 204: Für jedes stetig $f : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$ ist $P[f]$ stetig auf ∂D und harmonisch auf D .

Satz 205: Sei $f : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist $P[f]$ genau dann holomorph in U , wenn für alle $n < 0$ gilt $\tilde{f}(n) = a_n$.

Die letzten beiden Sätze stammen aus der Fourier-Analyse, und werden in entsprechenden Büchern behandelt und bewiesen.

Satz 206: Falls $f : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$ und $\varphi(x) := f(e^{ix})$ stetig differenzierbar, also $\varphi \in \mathcal{C}^1$ ist, so gilt

$$f(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \tilde{f}(n) z^n$$

für $|z| = 1$. Falls $\varphi \in \mathcal{C}^2$ ist, so konvergiert die Reihe gleichmäßig und absolut gegen

$$f = f_+ + f_- \quad \text{mit} \quad f_+(z) := \sum_{n \geq 0} \tilde{f}(n) z^n \quad \text{und} \quad f_-(z) := \sum_{n < 0} \tilde{f}(n) z^n .$$

Satz 207: Falls $f : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$ und $x \mapsto f(e^{ix})$ zweimal stetig differenzierbar ist, so gibt es stetig $u_{\pm} : \bar{D} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $u_{\pm}|_0$ holomorph und $f(z) = u_+(z) + u_-(z)$.

Literaturverzeichnis

- [Jän99] Jänich, K.: „*Funktionentheorie*“, 5. Auflage, Springer-Verlag, 1999.
- [FiL03] Fischer, W.; Lieb, I.: „*Funktionentheorie*“, 8. neubearbeitete Auflage, Vieweg, 2003.
- [ReS02] Remmert, R.; Schumacher, G.: „*Funktionentheorie 1*“, 5. neubearbeitete Auflage, Springer-Verlag, 2002.
- [BaN99] Bak, J., Newman, D. J.: „*Complex Analysis*“, Second Edition, Springer-Verlag, 1999.
- [Lan99] Lang, S.: „*Complex Analysis*“, Fourth Edition, Springer-Verlag, 1999.
- [Con78] Conway, B.: „*Functions of One Complex Variable*“, Second Edition, Springer-Verlag, 1978.

Teil II.

Riemannsche Flächen

10. Komplexe Analysis auf komplexen Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel werden wir viele Ergebnisse der komplexen Analysis auf komplexen Mannigfaltigkeiten übertragen, wir gehen also von der Analysis in einer komplexen Veränderlichen zur Analysis in mehreren komplexen Veränderlichen über.

10.1. Komplexe Mannigfaltigkeiten und Holomorphie

Später werden wir uns primär mit Riemannschen Flächen beschäftigen, dies sind im wesentlichen zusammenhängende kompakte 1-Mannigfaltigkeiten oder alternativ reell betrachtet glatte 2-Mannigfaltigkeiten.

10.1.1. Mehrdimensionale Holomorphie

Zuerst aber verallgemeinern wir unseren wichtigstens Begriff der Funktionentheorie auf mehrdimensionale unitäre Vektorräume.

Definition 1 (Mehrdimensional holomorph): Sei $U \subset \mathbb{C}^m$ offen und $z = (z_1, \dots, z_m) \in U$. Eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ heißt **komplex differenzierbar im Punkt z** , falls eine der folgenden zwei äquivalenten Bedingungen¹ erfüllt ist:

1. Es existiert eine komplex-lineare Abbildung $L : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ mit

$$\lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ w \in \mathbb{C}^m}} \left| \frac{f(z+w) - f(z) - Lw}{w} \right| = 0 .$$

2. Die Funktion f ist reell differenzierbar in z und für $j = 1, \dots, m$ gilt, dass die Abbildung

$$a \mapsto f(z_1, \dots, z_{j-1}, z_j + a, z_{j+1}, \dots, z_m)$$

komponentenweise komplex differenzierbar in 0 ist, wobei a aus einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C}$ sei.

Die Funktion f heißt **holomorph**, falls f in jedem Punkt $z \in U$ komplex differenzierbar ist.

Beispiel: Jedes Polynom $P(z_1, \dots, z_n)$ ist holomorph auf ganz \mathbb{C}^n .

Eine mehrdimensional holomorphe Funktion ist also komponentenweise holomorph und rein formal genauso wie im eindimensionalen Fall definiert.

¹Die Äquivalenz haben wir für den eindimensionalen Fall $n = m = 1$ bereits in Satz 7 auf Seite 5 gezeigt, der allgemeine Fall folgt trivial.

10.1.2. Komplexe Mannigfaltigkeiten und der $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$

Die Definitionen der Bestandteile einer komplexen Mannigfaltigkeit sind völlig analog zu ihren reellen Äquivalenten definiert, man ersetzt lediglich \mathbb{R} durch \mathbb{C} und „glatt“ durch „holomorph“.

Definition 2 (Komplexe Karte): Sei X ein topologischer Raum. Eine n -dimensionale **komplexe Karte auf X** ist ein Paar (U, φ) , wo $U \subset X$ eine offene Teilmenge und φ ein Homöomorphismus von U auf eine offene Teilmenge des \mathbb{C}^n ist.

Definition 3 (Holomorpher Atlas): Ein n -dimensionaler **holomorpher Atlas** auf einem topologischen Raum X ist eine Familie $A := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ von n -dimensionalen komplexen Karten auf X , sodass die Definitionsgebiete ganz X überdecken, also $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ gilt und alle Kartenwechse $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ holomorph sind.

Definition 4 (Komplexe Mannigfaltigkeit): Eine n -dimensionale **komplexe Mannigfaltigkeit** ist ein Paar (X, A) , wo X ein **topologischer Hausdorff-Raum** mit einer **abzählbare Basis der Topologie** und A ein maximaler n -dimensionaler holomorpher Atlas für X sind.

Bemerkung: Zu jeder komplexen n -Mannigfaltigkeit X gibt es eine zugrundeliegende reelle $2n$ -Mannigfaltigkeit \underline{X} , weil $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ ist.

Beispiel: 1. Jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}^n$ ist eine komplexe n -Mannigfaltigkeit.

2. Betrachte den **komplexen projektiven Raum** $\mathbb{C}\mathcal{P}^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$, wo $w \sim z$ gilt, wenn es ein $t \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $w = tz$ gibt - beide Punkte z und w sind also \mathbb{C} -linear zueinander. Folglich kann man $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$ auch als die Menge der eindimensionalen \mathbb{C} -linearen Unterräume von \mathbb{C}^{n+1} betrachten. Es sei

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}\mathcal{P}^n \quad (z_0, \dots, z_n) \mapsto [z_0, \dots, z_n]$$

die zur Quotiententopologie gehörige Projektionsabbildung von $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$, wobei wir die Zielkoordinaten $[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{C}\mathcal{P}^n$ auch als **homogene Koordinaten** bezeichnen.

Sei nun die $(n+1)$ -dimensionale **komplexe Einheitssphäre** durch

$$S^{2n+1} := \left\{ (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : \sum_{i=0}^n |z_i|^2 = 1 \right\}$$

gegeben, diese ist zusammenhängend und kompakt. Aus der Stetigkeit der Projektionsabbildung π folgt, dass dann auch $\mathbb{C}\mathcal{P}^n = \pi(S^{2n+1})$ zusammenhängend und kompakt ist.

Es ist zu zeigen, dass $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$ hausdorffsch ist. Weil aber für alle \mathbb{C} -linear unabhängigen $z, z' \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass die ε -Bälle $B_\varepsilon(z)$ und $B_\varepsilon(z')$ disjunkt sind, folgt sofort, dass die in den Bällen enthaltenen Punkte linear unabhängig sind.

Wir wollen nun ein **Atlas für $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$** erstellen. Dazu seien die Teilmengen

$$U_k := \{[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{C}\mathcal{P}^n : z_k \neq 0\}$$

offen, was äquivalent zu $\pi^{-1}(U_k)$ offen ist. Die Karte zu U_k sei nun durch

$$\varphi_k : U_k \longrightarrow \mathbb{C}^n \quad [z_0, \dots, z_n] \mapsto \left(\frac{z_0}{z_k}, \dots, \frac{\widehat{z_k}}{z_k}, \dots, \frac{z_n}{z_k} \right)$$

gegeben, wobei der Hut für das Weglassen der entsprechenden Komponenten steht. Die zugehörige Umkehrabbildung ist

$$\varphi_k^{-1} : \mathbb{C}^n \longrightarrow U_k \quad (w_1, \dots, w_n) \mapsto [w_1, \dots, w_k, 1, w_{k+1}, \dots, w_n].$$

Wie man direkt sieht, sind beide Abbildungen stetig und es gilt $\varphi_k \circ \varphi_k^{-1} = \text{Id}_{\mathbb{C}^n}$ sowie $\varphi_k^{-1} \circ \varphi_k = \text{Id}_{U_k}$, also ist φ_k ein Homöomorphismus. Außerdem gilt $\mathbb{C}\mathcal{P}^n = \bigcup_{k=0}^n U_k$, die Definitionsbereiche U_0, \dots, U_n überdecken also $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$.

Schließlich bleibt zu zeigen, dass der Atlas holomorph ist. Für $0 \leq i < k \leq n$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi_k \circ \varphi_j^{-1}(w_1, \dots, w_n) &= \varphi_k([w_1, \dots, w_j, 1, w_{j+1}, \dots, w_n]) \\ &= \left(\frac{w_1}{w_k}, \dots, \frac{w_j}{w_k}, \frac{1}{w_k}, \frac{w_{j+1}}{w_k}, \dots, \frac{w_n}{w_k} \right), \end{aligned}$$

und diese Abbildung ist ganz offensichtlich reell differenzierbar und holomorph bezüglich jeden w_l , also holomorph. Also ist $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j=0, \dots, n}$ ein holomorpher Atlas auf $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$ und definiert daher eine **holomorphe Struktur**. Also ist $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$ eine n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit.

10.1.3. Der komplexe Tangentialraum

Wir definieren nun einen Tangentialraum auf komplexen Mannigfaltigkeiten und zwar in völliger Analogie zur reellen Konstruktion aus der Analysis III.

Definition 5 (Komplexer Tangentialraum): Sei X eine n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und $p \in X$. Dann ist

$$T_p X := \left\{ \begin{array}{l} \text{Menge aller Derivationen } v : \{\text{Karten um } p\} \longrightarrow \mathbb{C}^n \text{ mit} \\ (U, \varphi) \mapsto v_\varphi, \text{ sodass für alle Karten } (U, \varphi) \text{ und } (V, \psi) \text{ um } p \\ \text{die Transformationsgleichung } D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}(v_\varphi) = v_\psi \text{ gilt.} \end{array} \right\}$$

der **komplexe Tangentialraum am Punkt** p folglich ist $T_p X$ ein n -dimensionaler komplexer Vektorraum, und es gilt $T_p X = T_p \underline{X}$ als reelle Vektorräume betrachtet.

Man erkennt, dass wir wieder die algebraische Definition des Tangentialraums verwenden. Eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei komplexen Mannigfaltigkeiten ist dann folgendermaßen definiert.

Definition 6 (Holomorph zwischen Mannigfaltigkeiten): Seien X^m und Y^n komplexe Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt **holomorph**, falls für alle Karten (U, φ) auf X bzw. (V, ψ) auf Y gilt, dass $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n$ im Definitionsbereich holomorph ist.

Bemerkung: Eine holomorphe Abbildung $f : X^m \longrightarrow Y^n$ definiert für jedes $p \in X$ eine komplex-lineare **Tangential-Abbildung** $Tf_p : T_p X \longrightarrow T_{f(p)} Y$, sodass für alle Karten (U, φ) um p und (V, ψ) um $f(p)$ gilt, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_p X^m & \xrightarrow{Tf_p} & T_{f(p)} Y^n \\ \varphi_* \downarrow \cong & \circlearrowleft & \cong \downarrow \psi_* \\ \mathbb{C}^m & \xrightarrow{D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

kommutiert, ebenfalls völlig analog zum reellen Fall.

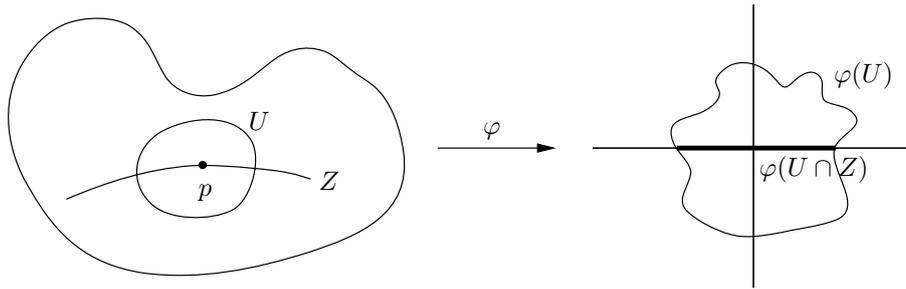


Abbildung 10.1.: „Flachmacher-Karte“ um eine Untermannigfaltigkeit Z .

10.2. Komplexe Untermannigfaltigkeiten

Auch die formale Definition einer Untermannigfaltigkeit und der zugehörige Urbildsatz übertragen sich direkt aus der Analysis III auf den komplexen Fall.

Definition 7 (Komplexe Untermannigfaltigkeit): Sei X eine komplexe n -Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $Z \subset X$ heißt k -dimensionale **komplexe Untermannigfaltigkeit**, falls es für jeden Punkt $p \in Z$ eine Karte (U, φ) auf X um p gibt, sodass $\varphi(U \cap Z) = \varphi(U) \cap (\mathbb{C}^k \times \{0\})$ gilt.

Satz 8: Sei $F : X^{n+k} \rightarrow Y^n$ holomorph und $q \in Y$. Falls $Tf_p : T_p X \rightarrow T_q Y$ surjektiv für alle $p \in f^{-1}(q)$ ist, so ist $f^{-1}(q) \subset X$ eine k -dimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit.

Satz: Sei $f : M \rightarrow N$ glatt und $q \in N$ ein regulärer Wert von f . Dann ist $Z := f^{-1}(q)$ eine $(m - n)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von M . Für jedes $p \in Z$ gilt dann $T_p Z = \ker(Tf_p)$.

Beispiel: Sei $P(z_0, \dots, z_n)$ ein **homogenes Polynom** vom Grad d , d.h. es gilt $P(tz) = t^d P(z)$ für alle $t \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}^{n+1}$. Dann ist die Nullstellenmenge

$$Z := \{[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{C}\mathcal{P}^n : P(z_0, \dots, z_n) = 0\}$$

wohldefiniert und heißt **projektive Varietät**.² Man beachte, dass P keine Funktion auf $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$ ist. Betrachte dann das konkrete Polynom

$$P(z_0, \dots, z_n) = z_0^d + \dots + z_n^d$$

für $d \in \mathbb{N}$. Dann ist $Z \subset \mathbb{C}\mathcal{P}^n$ genau dann eine Untermannigfaltigkeit, wenn $Z \cap U_k \subset U_k$ eine Untermannigfaltigkeit ist, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn $\varphi(Z \cap U_k) \subset \mathbb{C}^n$ eine Untermannigfaltigkeit ist. Nun ist unter Verwendung der $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$ -Karten (vgl. Seite 71)

$$\varphi_k(Z \cap U_k) = \{(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n : P(\varphi_k^{-1}(w_1, \dots, w_n)) = 0\}$$

und da $P_k(w) := P(\varphi_k^{-1}(w_1, \dots, w_n)) = w_1^d + \dots + w_k^d + 1 + w_{k+1}^d + \dots + w_n^d$ ist, folgt aus $P_k(w) = 0$, dass ein $w_j \neq 0$ ist. Also folgt

$$\frac{\partial P_k}{\partial w_j} = dw_j^{d-1} \neq 0$$

und damit ist 0 ein regulärer Wert von P_k . Also ist $P_k^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^n$ eine $(n - 1)$ -Untermannigfaltigkeit für alle k und nach dem Satz damit $Z \subset \mathbb{C}\mathcal{P}^n$ eine $(n - 1)$ -Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$. Für $d = 1$ besteht $Z = \{[1, z] \in \mathbb{C}\mathcal{P}^1 : 1 + z^d = 0\}$ aus d Punkten, für alle $d > 1$ ist es eine zusammenhängende Menge.

²Für vertiefende Informationen sei auf die algebraische Geometrie verwiesen.

Anders als möglicherweise erwartet, gibt es keine „interessanten“ holomorphen Funktionen auf kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten.

Satz 9: Sei X eine zusammenhängende kompakte komplexe n -Mannigfaltigkeit, dann sind alle holomorphen Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ konstant.

Korollar 10: \mathbb{C}^n enthält keine kompakten komplexen Untermannigfaltigkeiten positiver Dimension.

Wir werden später also unser Augenmerk auf meromorphe Funktionen richten müssen, um wirklich interessante Funktionen studieren zu können.

10.3. Erste Beispiele Riemanscher Flächen

10.3.1. Grundlegende Definition

Nun definieren wir den Begriff der Riemanschen Fläche. Als ausführlicheres Beispiel betrachten wir danach die Menge der Tori \mathbb{C}/Ω .

Definition 11 (Biholomorph): Seien X und Y zwei komplexe Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **biholomorph**, falls sie bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} biholomorph sind.

Definition 12 (Isomorphe Mannigfaltigkeiten): Zwei komplexe Mannigfaltigkeiten X und Y heißen **isomorph** zueinander, wenn es eine biholomorphe Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen ihnen gibt.

Das zentrale Objekt der weiteren Vorlesung wird der folgende, besondere Typ komplexer Mannigfaltigkeiten sein.

Definition 13 (Riemannsche Fläche): Eine **Riemannsche Fläche** ist eine zusammenhängende komplexe 1-Mannigfaltigkeit.

Bemerkung: Für Riemannsche Flächen ist das **Abzählbarkeitsaxiom** für die Basis der Topologie (vgl. Definition 4 von Seite 71) überflüssig, wie man durch einen anderen Ansatz zeigen kann.³ Der Einfachheit halber wollen wir es aber trotzdem bis auf weiteres annehmen.

Beispiel: 1. Eine offene Teilmenge von \mathbb{C} ist eine Riemannsche Fläche.

2. Der komplexe projektive Raum $\mathbb{C}\mathcal{P}^1 = U_0 \cup \{[0, 1]\}$ ist eine Riemannsche Fläche, da $\mathbb{C}\mathcal{P}^1$ diffeomorph zur Riemanschen Zahlenkugel ist. Dazu betrachte die Abbildung

$$\mathbb{C}\mathcal{P}^1 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}} \quad [z_0, z_1] \mapsto \begin{cases} \frac{z_1}{z_0} & : z_0 \neq 0 \\ \infty & : [z_0, z_1] = [0, 1] \end{cases} .$$

Mit den Kartengebieten U_0 und U_1 , die wir zuvor schon definiert hatten, ist $\mathbb{C}\mathcal{P}^1 = U_0 \cup U_1$ und die Karten $\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}$ sind biholomorph, denn es gilt

$$\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(z) = \frac{1}{z} .$$

Man kann ähnlich wie oben zeigen, dass $\mathbb{C}\mathcal{P}^1 \approx S^2$ ist. Anschaulich ist dies klar, da $U_0 = S^2 \setminus \{\text{Nordpol}\}$ und $U_1 = S^2 \setminus \{\text{Südpol}\}$ gilt.

³Ein ausführlicher Beweis dieser Tatsache findet sich im Buch „Riemannsche Flächen“ von LAMOTKE.

3. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gitter, also $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, wobei die Gittererzeugenden $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linear unabhängig sein sollen. Wie zuvor führen wir dann eine Äquivalenzrelation \sim auf \mathbb{C} ein, wobei $w \sim z \iff w - z \in \Omega$ gelten soll. Dann ist $\mathbb{C}/\Omega = \mathbb{C}/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen mit der Quotiententopologie und $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\sim$ die zugehörige Projektion.

Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}/\Omega$ ist nach Definition der Quotiententopologie nun genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}$ offen ist. Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen, so ist auch $\pi(U)$ offen, denn es ist

$$(\pi \circ \pi^{-1})(U) = \pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{\omega \in \Omega} (U + \omega)$$

offen - also ist die Torus-Projektion π eine offene Abbildung.

10.3.2. Tori als Riemannsche Flächen

Wir bleiben für eine Weile bei den Tori \mathbb{C}/Ω und spezifizieren diesen speziellen Typ von komplexen Mannigfaltigkeiten (bzw. Riemannschen Flächen) genauer.

Satz 14: Die Menge \mathbb{C}/Ω ist hausdorffsch.

Satz 15: Es existiert genau eine holomorphe Struktur auf \mathbb{C}/Ω , sodass $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$ holomorph ist.

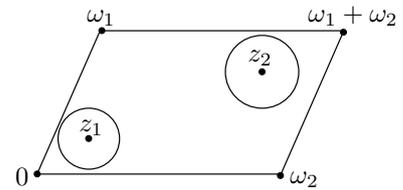


Abbildung 10.2.: Umgebungen.

Ist nun $\Omega' \subset \mathbb{C}$ ein anderes Gitter, so existiert ein reell-linearer Isomorphismus $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $A\Omega = \Omega'$, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow[A \text{ } \mathbb{R}\text{-linear}]{A} & \mathbb{C} \\ \pi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi' \\ \mathbb{C}/\Omega & \xrightarrow[\tilde{A}]{\approx} & \mathbb{C}/\Omega' \end{array}$$

kommutiert. Es gilt \tilde{A} holomorph $\iff A$ holomorph $\iff A$ komplex-linear, d.h. die Torusabbildung $\tilde{A} : \mathbb{C}/\Omega \rightarrow \mathbb{C}/\Omega'$ ist biholomorph, wenn A ein komplex-linearer Isomorphismus ist. Bis auf Diffeomorphismen gilt zudem

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}/\Omega & \xrightarrow{\approx} & \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\approx} & S^1 \times S^1 \\ & & \uparrow & \nearrow & \\ & & \mathbb{C} & \xrightarrow{z=x+iy \mapsto (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})} & \end{array}$$

10.4. Eigenschaften holomorpher Abbildungen

Kommen wir nun zu den wichtigsten Eigenschaften holomorpher Funktionen, die auf Riemannschen Flächen definiert sind.

10.4.1. Lokale Gestalt holomorpher Funktionen und Verzweigungspunkte

Zwei altbekannte Sätze aus der Funktionentheorie I übertragen sich problemlos.

Satz 16 (Identitätssatz): Seien X und Y zwei Riemannsche Flächen und $f, g : X \rightarrow Y$ holomorph. Falls die Menge $B := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ nicht diskret ist, dann ist $f = g$.

Satz 17 (Lokale Gestalt holomorpher Funktionen): Seien X und Y zwei Riemannsche Flächen, die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ holomorph und nicht konstant sowie $p \in X$ und $q := f(p)$. Dann existieren Karten (U, φ) um p und (V, ψ) um q mit $\varphi(p) = \psi(q) = 0$ und $f(U) \subset V$, und ein $k \in \mathbb{N}$, sodass

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^k$$

für alle $z \in \varphi(U)$ gilt.

Bemerkung: Dieser Exponent k hängt nicht von den Karten φ und ψ ab, weil er sich wie folgt charakterisieren lässt: Für jede hinreichend kleine Umgebung W um p existiert eine Umgebung W' um q mit $f(W) \supset W'$, sodass für alle $y \in W' \setminus \{q\}$ die Gleichung $f(x) = y$ genau k verschiedene Lösungen in W hat.

Definition 18 (Vielfachheit eines Punkts): Die oben erklärte Zahl k heißt die **Vielfachheit von p bezüglich f** , in Zeichen kurz $v_p(f) = k$.

Definition 19 (Verzweigungspunkt): Die Vielfachheit k in p ist genau dann größer Eins, wenn die Tangentialabbildung im Punkt p gleich Null ist. Dann heißt p ein **kritischer Punkt** und wird **Verzweigungspunkt von f** genannt. In diesem Fall heißt das Bild von f **kritischer Wert**.⁴

Um sich ein anschauliches Bild von einem Verzweigungspunkt zu machen, sei auf Abbildung 10.3 verweisen, die wir in ähnlichem Zusammenhang bereits auf Seite 46 gesehen haben.

Satz 20: Seien X und Y zwei Riemannsche Flächen und die Funktion $f : X \rightarrow Y$ holomorph sowie nicht konstant. Dann gelten:

1. Falls f injektiv ist, dann ist f eine biholomorphe Abbildung auf eine offene Teilmenge von Y , d.h. $f : X \rightarrow f(X) \subset Y$ ist biholomorph.
2. Falls X kompakt ist, so ist f surjektiv und Y auch kompakt.

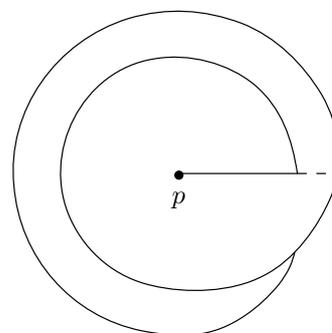


Abbildung 10.3.: Verzweigung.

10.4.2. Überlagerungen

Definition 21 (Überlagerung): Seien X und Y zwei topologische Räume. Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **Überlagerung**, falls es für jedes $y \in Y$ eine offene Umgebung $V \subset Y$ um y und eine Familie $\{U_j\}_{j \in J}$ disjunkter offener Teilmengen von X gibt, sodass gilt:

1. $f^{-1}(V) = \coprod_{j \in J} U_j$,
2. Für alle i ist die Einschränkung $f|_{U_j}$ ein Homöomorphismus $U_j \rightarrow V$.

Bemerkung: Aus der Definition folgt direkt, dass **Überlagerungen stets surjektiv sind**.

⁴Einen Verzweigungspunkt kann man alternativ auch als einen Punkt betrachten, bei dessen Umrundung entlang eines geschlossenen Weges sich der Wert der Funktion ändert.

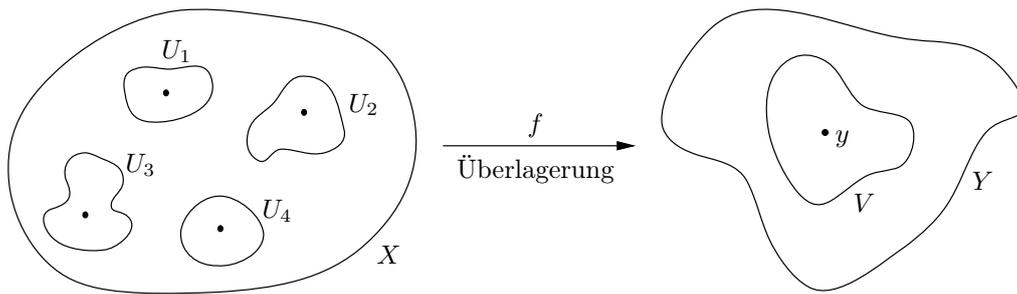


Abbildung 10.4.: Zwei Beispiele von Überlagerungen.

Wir betrachten ein paar Beispiele von Überlagerungen, um den neuen Begriff zu veranschaulichen.

Beispiel: 1. $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ mit $t \mapsto e^{it}$ ist eine Überlagerung.

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gitter, dann ist die Projektion $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$ eine Überlagerung. Wähle dann $\varepsilon > 0$ so, dass $D_{2\varepsilon}(0) \cap \Omega = \{0\}$ gilt. Sei dann $z_0 \in \mathbb{C}$ und $V := \pi(D_\varepsilon(z_0))$, dann ist

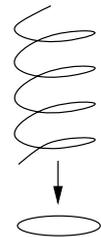
$$\pi^{-1}(V) = \coprod_{\omega \in \Omega} D_\varepsilon(z_0) + \omega,$$

und die Einschränkungen $\pi|_{D_\varepsilon(z_0)+\omega}$ sind biholomorph auf ihrem Bild.

3. $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist eine Überlagerung, da $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ gilt.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow[\text{Überlagerung}]{(x,y) \mapsto (e^x, e^{iy})} & \mathbb{R}_+ \times S^1 \\ & \searrow \text{exp} & \swarrow \approx \\ & & \mathbb{C}^* \end{array}$$

$(t,z) \mapsto tz$



Bemerkung: Falls $f : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung ist und Y zusammenhängend, dann ist die Anzahl der Urbilder $\#f^{-1}(c)$ unabhängig von $c \in Y$.

Beispiel: 1. Betrachte $D := \{z : |z| < 1\}$ offen. Die Inklusion $\iota : D \hookrightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto z$ ist nach der vorigen Bemerkung keine Überlagerung.

2. Die k -te Potenz $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ mit $z \mapsto z^k$ ist eine k -blättrige Überlagerung.

10.4.3. Eigentliche Abbildungen

Definition 22 (Eigentliche Abbildung): Seien X und Y zwei lokal kompakte Hausdorff-Räume. Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **eigentlich**, wenn die folgenden zwei äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

1. Für alle kompakten Teilmengen $K \subset Y$ ist das Urbild $f^{-1}(K) \subset X$ wieder kompakt.
2. f ist eine abgeschlossene Abbildung⁵ und $f^{-1}(c)$ ist kompakt für alle Punkte $c \in Y$.

⁵Bei einer **abgeschlossenen Abbildung** sind die Bilder abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen.

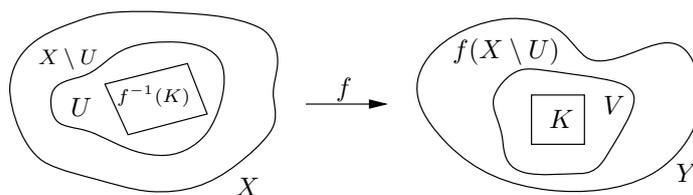


Abbildung 10.5.: Darstellung der Umgebungen und Mengen von Satz 23.

Beispiel: 1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gitter, dann ist die Torusprojektion $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$ nicht eigentlich, weil $f^{-1}(c)$ nicht beschränkt ist.

2. Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto z^k$ für $k \in \mathbb{N}$ die k -te Potenz und $K \subset \mathbb{C}$ eine kompakte Teilmenge. Dann wähle $r > 0$ so, dass $K \subset \overline{D_{r,k}(0)}$ liegt. Dann ist $f^{-1}(\overline{D_{r,k}(0)}) = \overline{D_r(0)}$ und $f^{-1}(K)$ eine abgeschlossene Teilmenge, also einer kompakte Teilmenge.

3. Bijektive stetige Abbildungen sind im Allgemeinen nicht eigentlich, betrachte etwa die Bijektion von $]0, 1[$ auf eine sich selbst berührende „Schleife“. (vgl. Abbildung ...)

Satz 23: Sei $f : X \rightarrow Y$ eigentlich, $K \subset Y$ kompakt und $U \subset X$ eine offene Umgebung von $f^{-1}(K)$. Dann ist $V := Y \setminus f(X \setminus U)$ eine offene Umgebung von K mit $f^{-1}(V) \subset U$.

Satz 24: Seien X und Y zwei Riemannsche Flächen und die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ eigentlich, holomorph und nicht konstant. Dann gelten die folgenden drei Aussagen:

1. Für alle $y \in Y$ ist das Urbild $f^{-1}(y)$ eine endliche Menge.
2. Für jedes $y \in Y$ sei $\mathfrak{d}_y := \sum_{x \in f^{-1}(y)} v_x(f)$, dann ist \mathfrak{d}_y unabhängig von y . Wir nennen $\deg(f) := \mathfrak{d}_y$ den **Grad von f** .
3. Falls f keine Verzweigungspunkte hat, dann ist f eine Überlagerung.

Im Allgemeinen nennt man die Abbildung f eine **verzweigte Überlagerung**.

11. Meromorphe Funktionen

Nachdem wir in Satz 9 bereits gesehen haben, dass holomorphe Funktionen auf Riemannschen Flächen allesamt konstant - und damit nicht sehr interessant - sind, müssen wir unser Augenmerk auf meromorphe Funktionen richten. Im weiteren Verlauf werden wir einige tiefe Sätze für die Beziehung zwischen meromorphen Funktionen und Riemannschen Flächen beweisen.

Definition 25 (Meromorphe Funktion): Unter einer **meromorphen Funktion auf einer Riemannschen Fläche** X verstehen wir eine holomorphe Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{C}\mathcal{P}^1$ mit $f \not\equiv \infty$, sprich $f^{-1}(\infty)$ ist diskret. Falls $f(p) = \infty$ gilt, so heißt p wie üblich **Pol von f** . Es sei dabei an die Bijektion $\mathbb{C}\mathcal{P}^1 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ erinnert.

11.1. Die Ordnung eines Pols und einer Nullstelle

Direkt aus der vorigen Definition schließt sich die Frage an, wie die Ordnung eines Pols (oder einer Nullstelle) auf Riemannschen Flächen zu definieren ist.

Definition 26 (Ordnung): Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine Umgebung von z_0 und $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Wir definieren

$$\text{ord}_{z_0}(f) := \sup \left\{ k \in \mathbb{Z} : \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^k} \text{ ist beschränkt auf } U \setminus \{z_0\} \right\} \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

als die **Ordnung von z_0** . Trivialerweise folgt für $f \equiv 0$ die Ordnung $\text{ord}_{z_0}(f) = \infty$ bzw. $\text{ord}_{z_0}(f) = -\infty$, falls es kein solches k gibt.

Bemerkung: Falls $z_0 = 0$ ist und f durch $f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_k \neq 0$ in eine Laurent-Reihe entwickelbar ist, dann ist $\text{ord}_0(f) = k$. Insbesondere entspricht $\text{ord}_{z_0}(f)$ der Ordnung einer Nullstelle und $-\text{ord}_{z_0}(f)$ der Ordnung eines Pols, wenn man die alten Definitionen der Funktionentheorie I betrachtet.

Lemma 27 (Ordnungsinvarianz): Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offene Mengen, $\varphi : U \rightarrow V$ diffeomorph, $p \in U$ sowie $q := \varphi(p) \in V$ und $f : V \setminus \{q\} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt

$$\text{ord}_p(f \circ \varphi) = \text{ord}_q(f) ,$$

d.h. die Ordnung ist invariant unter Diffeomorphismen.

Korollar 28: Sei X eine Riemannsche Fläche, die Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{C}\mathcal{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}}$ meromorph, $p \in X$ und (U, φ) eine Karte um p . Dann ist die Ordnung $\text{ord}_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1})$ eine meromorphe Funktion auf \mathbb{C} und unabhängig von der Wahl der Karte φ , und wir deshalb einfach mit $\text{ord}_p(f)$ bezeichnet.

Satz 29: Sei $f : X \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine meromorphe Funktion auf X und $p \in X$ ein Punkt. Dann gelten folgende Aussagen für die Ordnung im Punkt p :

1. Falls $f(p) \neq 0$ und $f(p) \neq \infty$ gilt, dann ist $\text{ord}_p(f) = 0$.

2. Falls $f(p) = 0$ eine Nullstelle und $f \not\equiv 0$ ist, dann stimmen Ordnung und Vielfachheit überein, es gilt also $\text{ord}_p(f) = v_p(f)$.
3. Falls $f(p) = \infty$ ein Pol ist, so gilt $\text{ord}_p(f) = -\text{ord}_p\left(\frac{1}{f}\right) = -v_p\left(\frac{1}{f}\right)$.
4. Ist $f \equiv 0$, so ist $\text{ord}_p(f) = \infty$.

Sei nun X eine Riemannsche Fläche und $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ meromorphe Funktionen auf X , die nicht alle gleich Null sind. Zuerst bemerken wir, dass $\bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(\infty)$ eine diskrete abgeschlossene Menge ist.

Dann definieren wir eine Abbildung $[f_1, \dots, f_n] : X \rightarrow \mathbb{C}\mathcal{P}^{n-1}$ wie folgt: Sei $p \in X$ ein Punkt und wähle ein $i \in \{1, \dots, n\}$, für welches die Ordnung $\text{ord}_p(f_i)$ der Funktion f_i minimal ist. Da nicht alle $f_i \equiv 0$ sind, gibt es mindestens ein $\text{ord}_p(f_i) < \infty$, sodass das i wohldefiniert ist. Dies impliziert außerdem, dass auch die Nullstellenmenge $f_i^{-1}(0)$ diskret und abgeschlossen ist. Dann ist für alle k der Quotient $\frac{f_k}{f_i}$ nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz holomorph in einer Umgebung von p , da wegen $\text{ord}_p(f_k) \geq \text{ord}_p(f_i)$ gilt, dass der Quotient beschränkt in einer punktierten Umgebung von p ist. Also ist

$$[f_1, \dots, f_n] := \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{f_{j-1}}{f_i}, 1, \frac{f_{j+1}}{f_i}, \dots, \frac{f_n}{f_i} \right]$$

holomorph in einer Umgebung von p und unabhängig von der Wahl von i , sofern mehrere Funktionen minimaler Ordnung existieren.

Beispiel: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Wie wir bereits früher gesehen haben, ist die Menge der elliptischen Funktionen zum Gitter Ω gleich der Menge der meromorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, die für alle $z \in \mathbb{C}$ und $\omega \in \Omega$ die Eigenschaft $f(z + \omega) = f(z)$ erfüllen. Wir erhalten somit eine Bijektion

$$\{\text{Elliptische Funktionen zum Gitter } \Omega\} \xleftrightarrow{\text{Bij.}} \{\text{Meromorphe Funktionen auf } \mathbb{C}/\Omega\}$$

durch die Torusprojektion $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$.

Im letzten Semester haben wir uns zunächst schwer getan, elliptische Funktionen zu finden. Schließlich erhielten wir die Weierstraß-Funktion

$$\wp(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

als primäre elliptische Funktion, und auch $\wp'(z)$ war elliptisch.¹

11.2. Elementarsymmetrische Funktionen

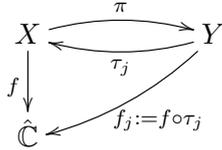
11.2.1. Konstruktion der elementarsymmetrischen Funktionen

Seien X und Y zwei Riemannsche Flächen, $\pi : X \rightarrow Y$ eine n -blättrige holomorphe (unverzweigte) Überlagerung und $f : X \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine meromorphe Funktion. Wir möchten nun aus f eine (oder mehrere) meromorphe Funktionen auf Y konstruieren. Weil X aber zusammenhängend ist, gibt es aber keine stetige Funktion $\tau : Y \rightarrow X$ mit $\pi \circ \tau = \text{Id}_Y$, es sei denn, dass

¹Eine spätere Aufgabe wird es sein zu zeigen, dass $[1, \wp, \wp'] : \mathbb{C}/\Omega \rightarrow \mathbb{C}\mathcal{P}^2$ eine Einbettung ist, d.h. das Bild eine Untermannigfaltigkeit und die Abbildung auf dem Bild biholomorph ist.

$n = 1$ ist - der einfache Weg ist hier also nicht möglich. Lokal aber ist dies durchaus möglich, wir erhalten dann aber gleich n verschiedene Funktionen τ .

Sei $y \in Y$ und $V \subset Y$ eine offene Umgebung von y , sodass $\pi^{-1}(V) = \coprod_{j=1}^n U_j$ für $U_j \subset X$ offen gilt und die Einschränkung $\pi|_{U_j}$ biholomorph auf V ist. Dann definieren wir die lokalen τ -Abbildungen durch $\tau_j := (\pi|_{U_j})^{-1} : V \xrightarrow{\sim} U_j$.



Damit können wir nun meromorphe Funktionen $f_j := f \circ \tau_j : V \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definieren. Jedes **symmetrische Polynom**² in f_1, \dots, f_n ist eine meromorphe Funktion auf V . Es reicht, die **elementarsymmetrischen Polynome** $s_j(x_1, \dots, x_n)$ zu betrachten. Für Funktionen

$$\prod_{j=1}^n (T - f_j) = T^n + c_1 T^{n-1} + \dots + c_n$$

sind dann die Koeffizienten $c_j = (-1)^j s_j(f_1, \dots, f_n)$ meromorphe Funktionen auf V .

Falls V zusammenhängend ist, so sind die τ_j eindeutig bestimmt bis auf Permutationen. Dies impliziert, dass die c_j lokal eindeutig bestimmt sind, und definieren deswegen globale meromorphe Funktionen c_j auf Y .

Definition 30 (Elementarsymmetrische Funktion): Die oben konstruierten Funktionen c_j sind die **elementarsymmetrischen Funktionen von f** bezüglich der Überlagerung π .

11.2.2. Eigenschaften und Fortsetzbarkeit

Zunächst beweisen wir einige Aussagen über die Abschätzbarkeit der elementarsymmetrischen Funktionen und der zugehörigen Funktion.

Lemma 31: Falls $z \in \mathbb{C}$ für das von den Koeffizienten $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ für $n \geq 1$ induzierte Polynom $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ eine Nullstelle ist, so gilt die Abschätzung

$$|z| \leq \max \left(1, \sum_{j=1}^n |a_n| \right) .$$

Lemma 32: Sei $f : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion passend zur vorigen Konstruktion. Für alle $p \in X$, die kein Pol von f sind, also $f(p) \neq \infty$, gilt die Abschätzung

$$|f(p)| \leq \max \left(1, \sum_{j=1}^n |c_j(\pi(p))| \right) .$$

Definition 33 (Holomorphe/Meromorphe Funktionenmenge): Für eine Riemannsche Fläche X definieren wir die beiden Funktionenmengen

$$\begin{aligned}
 \mathcal{O}(X) &:= \{\text{Holomorphe Funktionen auf } X\} \\
 \mathcal{M}(X) &:= \{\text{Meromorphe Funktionen auf } X\} .
 \end{aligned}$$

²Ein Polynom ist **symmetrisch**, wenn für alle Permutationen $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ gilt $P(x_1, \dots, x_n) = P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$.

Bemerkung: Da für zwei meromorphe Funktion $f, g : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ die Summe $f + g$ und das Produkt $f \cdot g$ meromorph sind, und auch $\frac{1}{f}$ für $f \neq 0$ meromorph ist, bildet die **Menge der meromorphen Funktionen $\mathcal{M}(X)$ einen Körper.**

Eine praktische Eigenschaft der elementarsymmetrischen Funktionen ist, dass Aussagen über die holomorphe bzw. meromorphe Fortsetzbarkeit der Funktion äquivalent zur entsprechenden Fortsetzbarkeit der zugehörigen elementarsymmetrischen Funktionen ist. Dies beweisen wir im folgenden Satz.

Satz 34: Seien X und Y zwei Riemannsche Flächen, $\pi : X \rightarrow Y$ holomorph, eigentlich, nicht konstant und vom Grad n . Sei $B \subset Y$ eine abgeschlossene diskrete Teilmenge, die alle kritischen Werte von π umfasst und $A := \pi^{-1}(B)$ das zugehörige Urbild, also die Menge der kritischen Punkte.

Sei die Abbildung $f \in \mathcal{O}(X \setminus A)$ und $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{O}(Y \setminus B)$ die elementarsymmetrischen Funktionen von f bezüglich der Überlagerung $X \setminus A \rightarrow Y \setminus B$ gemäß

$$\begin{array}{ccc} X \setminus A & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \pi \downarrow & \nearrow c_1, \dots, c_n & \\ Y \setminus B & & \end{array}$$

Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

1. Die Funktion f lässt sich holomorph (bzw. meromorph) auf ganz X fortsetzen,
2. Alle c_j lassen sich holomorph (bzw. meromorph) nach Y fortsetzen.

11.3. Körpererweiterungen

Wir haben bereits bemerkt, dass die Menge $\mathcal{M}(X)$ der meromorphen Funktionen $X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ einen Körper bildet. Jetzt wollen wir diese Menge $\mathcal{M}(X)$ genauer studieren.

11.3.1. Algebraische Hilfsmittel

Als wichtiges algebraisches Hilfsmittel für die weiteren Ausführungen betrachten wir daher nun Körpererweiterungen.

Definition 35 (Körpererweiterung): Sei L ein Körper mit Charakteristik 0 und $K \subset L$ ein Unterkörper. Dann heißt L **Körpererweiterung von K** und L ist ein K -Vektorraum. Man nennt

$$[L : K] := \dim_K(L)$$

den **Grad der Körpererweiterung.**

Definition 36 (Kleinster Unterkörper): Falls $a_1, \dots, a_r \in L$, dann ist $K(a_1, \dots, a_r)$ der **kleinste Unterkörper von L , der K und alle a_1, \dots, a_r enthält.**

Mit $K[x]$ sei der Polynomring über K bezeichnet, es ist also $K[x]$ der Ring der Polynome in x mit Koeffizienten in K .

Definition 37 (Algebraisch über K): Ein $a \in L$ heißt **algebraisch über K** , falls der Grad der Körpererweiterung $[K(a) : K] < \infty$ ist, oder äquivalent, falls es ein $P(x) \in K[x]$ mit $P(a) = 0$ gibt.

In diesem Fall gibt es genau ein **monisches Polynom** $P_a(x) \in K[x]$ kleinsten Grades mit $P_a(a) = 0$ und $[K(a) : K] = \deg P_a$.

Satz 38: Seien $a_1, \dots, a_r \in L$ allesamt algebraisch über K . Dann existiert ein $b \in L$ mit $K(a_1, \dots, a_r) = K(b)$.³ □

Satz 39: Falls $\sup_{a \in L} [K(a) : K] = n < \infty$ ist, so ist $[L : K] = n$.

Satz 40: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $a_1, \dots, a_n \in X$ verschiedene Punkte von X sowie $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ verschiedene komplexe Zahlen. Dann gibt es eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ mit $f(a_j) = c_j$ für alle $j = 1, \dots, n$.⁴

11.3.2. Der induzierte Meromorphiemorphismus

Satz 41: Seien X und Y zwei kompakte Riemannsche Flächen, $\pi : X \rightarrow Y$ holomorph und nicht konstant mit Grad $n \geq 1$. Dann ist

$$\pi^* : \mathcal{M}(Y) \rightarrow \mathcal{M}(X) \quad \text{gemäß} \quad X \xrightarrow[\text{holomorph}]{\pi} Y \xrightarrow[\text{holomorph}]{f} \mathbb{C}\mathcal{P}^1$$

ein Körpermonomorphismus und $\mathcal{M}(X)$ eine Körpererweiterung von $\pi^*\mathcal{M}(Y)$ von Grad n , also $[\mathcal{M}(X) : \pi^*\mathcal{M}(Y)] = n$.

Beispiel: Die meromorphe Funktion

$$\mathbb{C}\mathcal{P}^1 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}} \quad [z_0 : z_1] \rightarrow \frac{z_1}{z_0}$$

wird im Folgenden mit z bezeichnet, dies entspricht der Identifikation mit $\text{Id} : \mathbb{C}\mathcal{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathcal{P}^1$. Es gilt

$$\mathbb{C} \subset \mathbb{C}\mathcal{P}^1 \xrightarrow{z} \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}} \quad w \mapsto [1, w] \mapsto w.$$

Bemerkung: In der Funktionentheorie I haben wir durch Satz 92 von Seite 33 bereits $\mathcal{M}(\mathbb{C}\mathcal{P}^1) = \mathbb{C}(z)$ bewiesen, wobei $\mathbb{C}(z)$ der Körper der rationalen Funktionen ist.⁵ Falls $R(z)$ rational ist, so gilt $R([1, w]) = [1, R(w)]$, wenn w kein Pol ist.

11.3.3. Rationale Funktionen und irreduzible Polynome

Satz 42: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $g \in \mathcal{M}(X)$ eine nicht konstante meromorphe Funktion auf X . Dann ist

$$[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(g)] = \deg \underbrace{(g : X \rightarrow \mathbb{C}\mathcal{P}^1)}_{\text{holomorph}},$$

wobei $\mathbb{C}(g) = g^*\mathcal{M}(\mathbb{C}\mathcal{P}^1)$ wieder der **Körper der rationalen Funktionen in g** sei. Also existiert ein $f \in \mathcal{M}(X)$, sodass $\mathcal{M}(X) = \mathbb{C}(f, g)$ gilt, d.h. jede meromorphe Funktion auf X ist eine rationale Funktion in f und g .

³Für den Beweis dieses Satzes siehe Algebra I-Vorlesung.

⁴Der durchaus komplizierte Beweis dieses Satzes erfolgt erst wesentlich später auf Seite 131 in Satz 192.

⁵Man verwende die (inverse) stereographische Projektion $(\mathbb{C}\mathcal{P}^1 \approx S^2) \setminus \{\text{Nordpol}\}$ und beachte dann, dass der Satz fordert, dass die Funktion keine wesentliche Singularität im Unendlichen (im Fall von $\mathbb{C}\mathcal{P}^1 \approx S^2$ also dem Nordpol) haben darf.

Bemerkung: Aus den Voraussetzungen folgt, dass die Funktion g transzendent über \mathbb{C} sein muss, d.h. nicht algebraisch. Wäre g algebraisch, also die Lösung von $g^m + a_1g^{m-1} + \dots + a_m = 0$ für $a_j \in \mathbb{C}$, dann wäre nach der Abschätzung aus Lemma 31

$$|g(p)| \leq \max \left(1, \sum_{j=1}^m |a_j| \right)$$

die Funktion g beschränkt und deswegen holomorph, also nach Satz 9 konstant - im Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes.

Definition 43 (Irreduzibles Polynom): Ein irreduzibles Polynom $P(x, y)$ ist nicht konstant und nicht das Produkt zweier nicht konstanter Polynome $P_1(x)$ und $P_2(x)$.

Satz 44: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $f, g \in \mathcal{M}(X)$ zwei meromorphe Funktionen auf X . Dann gibt es ein irreduzibles komplexes Polynom $P(x, y)$ in zwei Variablen mit $P(f, g) = 0$.

Beispiel: Sei $X = \mathbb{C}/\Omega$ für das Gitter $\Omega \subset \mathbb{C}$. Aus der Funktionentheorie I wissen wir bereits, dass $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Omega) = \mathbb{C}(\wp, \wp')$ gilt, vgl. Satz 156 auf Seite 55. Außerdem hatten wir

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z))^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

für die elliptischen Invarianten

$$g_2 \stackrel{\text{def}}{=} 60 \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4} \quad \text{und} \quad g_3 \stackrel{\text{def}}{=} 140 \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6}.$$

12. Polynome und Riemannsche Flächen

Als nächstes werden wir nun jedem irreduziblen komplexen Polynom $P(x, y)$ eine kompakte Riemannsche Fläche zuordnen.

12.1. Nullstellenmengen komplexer Polynome

Die Riemannschen Flächen werden wir dabei aus den Nullstellenmengen von irreduziblen Polynomen in zwei komplexen Veränderlichen erhalten. Diese tragen üblicherweise die folgende Bezeichnung.

Definition 45 (Affine Varietät/Locus): Wir definieren den **Locus** eines komplexen Polynoms, die sogenannte **affine Varietät**, als

$$\text{loc } P := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : P(x, y) = 0\} .$$

Bemerkung: Falls das Polynom P nicht irreduzibel ist, also $P = QR$ gilt, dann erhalten wir für den Locus die Multiplikationsformel $\text{loc } P = \text{loc } Q \cup \text{loc } R$.

Satz 46: Das Polynom $P(x, y) := x^2 + y^3$ ist irreduzibel, aber $\text{loc } P$ ist keine komplexe Untermannigfaltigkeit von \mathbb{C}^2 .

12.2. Diskriminanten

Nachdem wir uns im letzten Kapitel mit Körpererweiterungen und den daraus resultierenden Folgerungen für meromorphe Funktionen beschäftigt haben, führen wir nun Diskriminanten als weiteres algebraisches Hilfsmittel ein.

Wir betrachten Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten aus \mathbb{Z} in x, t_1, \dots, t_n :

$$(x - t_1) \cdots (x - t_n) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n$$

mit $c_j = (-1)^j s_j(t_1, \dots, t_n)$ und s_j als j -tes elementarsymmetrisches Polynom. Außerdem gilt für das symmetrische Polynom

$$\prod_{i < j} (t_i - t_j)^2 = g_n(c_1, \dots, c_n)$$

für ein eindeutig bestimmtes Polynom $g_n(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$.

Definition 47 (Diskriminante): Falls A ein kommutativer Ring und durch Koeffizienten $a_i \in A$ ein Polynom $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ definiert ist, so heißt

$$\Delta_P := g_n(a_1, \dots, a_n) \in A$$

die **Diskriminante von P** .

Satz 48: Sei K ein Körper und $P(x) \in K[x]$ ein irreduzibles monisches¹ Polynom. Dann ist die zugehörige Diskriminante $\Delta_P \neq 0$.

¹Bei einem monischen Polynom ist der höchste Koeffizient gleich Eins.

12.3. Der Locus und Riemannsche Flächen

Lemma 49: Sei $P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ ein irreduzibles Polynom. Dann ist $P(x, y)$ auch irreduzibel als Polynom in x mit Koeffizienten in $\mathbb{C}(y)$, also im Polynomring $\mathbb{C}(y)[x]$.

Lemma 50: Sei $P(x, y)$ ein irreduzibles Polynom in $\mathbb{C}[x, y]$ und $\deg_x P > 0$. Dann ist das Polynom $P(x, c) \neq 0$ für jedes $c \in \mathbb{C}$.

12.3.1. Die Nullstellenmenge als Riemannsche Fläche

Satz 51: Sei $P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ ein irreduzibles Polynom und $Z := \text{loc } P \subset \mathbb{C}^2$. Dann existiert eine endliche Teilmenge $E \subset Z$, sodass $Z \setminus E$ eine zusammenhängende eindimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit von \mathbb{C}^2 ist, also damit eine Riemannsche Fläche.

Bemerkung: Falls die Nullstellenmenge $E = \emptyset$ ist, also leer, dann kann Z trotzdem nicht kompakt sein, da komplexe Mannigfaltigkeiten (außer 0-dimensionale) stets, vgl. Korollar 10 von Seite 74 nicht kompakt sind.

Beweisidee: Aus dem Polynom $P \in \mathbb{C}[x, y]$ konstruieren wir ein irreduzibles Polynom $Q \in \mathbb{C}(y)[x]$. Die Menge E wird dann durch die Nullstellen und Pole der Diskriminante dieses Polynoms bestimmt, sodass $(\text{loc } P) \setminus E$ eine 1-Untermannigfaltigkeit von \mathbb{C}^2 ist.

Aufwendiger ist es nun, den Zusammenhang dieser Menge zu zeigen, was per Widerspruch geschieht. Die Idee ist es, das Polynom Q zu faktorisieren und entsprechend der Lage der Nullstellen in den Zusammenhangskomponenten von $(\text{loc } P) \setminus E$ zwei Polynome zu definieren. Durch Abschätzung der elementarsymmetrischen Funktionen der Zerlegungspolynome erhält man, dass diese rational sind und daher die Zerlegungsteile in $\mathbb{C}(y)[x]$ liegen. Aus der Irreduzibilität von Q muss dann aber ein Zerlegungsteil verschwinden - also liegen alle Nullstellen in derselben Zusammenhangskomponente.

12.3.2. Decktransformationen und Überlagerungen

Definition 52 (Decktransformation): Seien X und Y zwei zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeiten. Unter einer **Decktransformation einer Überlagerung** $\pi : X \rightarrow Y$ verstehen wir einen Homöomorphismus $f : X \rightarrow X$, sodass $\pi \circ f = \pi$ gemäss

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi \\ & Y & \end{array}$$

kommutiert. Die Menge der Decktransformationen bezeichnen wir mit

$$\text{Deck}(\pi) := \{\text{Alle Decktransformation von } \pi\},$$

sie bildet eine Gruppe.

Bemerkung: Falls $x_0 \in X$ ist und $y_0 := \pi(x_0)$ gilt, so ist die Abbildung

$$\text{Deck}(\pi) \hookrightarrow \pi^{-1}(y_0) \quad f \mapsto f(x_0)$$

immer injektiv. Falls diese Abbildung bijektiv (für ein, dann jedes x_0) ist, dann heißt π **regulär**.

Proposition 53: Seien X und Y topologische Mannigfaltigkeiten, wobei X einfach zusammenhängend und Y zusammenhängend sei, und $\pi : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung. Dann ist π regulär.

Lemma 54 (Überlagerungssatz): Sei X eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit, $D' := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ die punktierte Einheitskreisscheibe und $\pi : X \rightarrow D'$ eine n -blättrige Überlagerung für $n \geq 1$. Dann gibt es einen Homöomorphismus $f : D' \rightarrow X$ mit $\pi \circ f = p_n$, wobei $p_n(z) := z^n$ ist, gemäß

$$\begin{array}{ccc}
 D' & \xrightarrow{f} & X \\
 & \searrow p_n & \swarrow \pi \\
 & & D'
 \end{array}
 \quad .$$

12.3.3. Existenz kompakter Riemannscher Flächen

Satz 55: Seien X und Y kompakte Riemannsche Flächen, $A \subset X$ sowie $B \subset Y$ endliche Teilmengen und $f : X \setminus A \rightarrow Y \setminus B$ holomorph und eigentlich.

1. Dann existiert eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ mit $\tilde{f}|_{X \setminus A} \equiv f$.
2. Falls f zusätzlich ein Isomorphismus ist, so ist auch die Fortsetzung \tilde{f} ein Isomorphismus (folglich haben A und B dieselbe Anzahl an Elementen).

Satz 56 (Riemannsche Flächen aus Locus): Sei $P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ ein komplexes irreduzibles Polynom. Dann gelten die folgenden beiden Aussagen:

1. Es gibt eine kompakte Riemannsche Fläche X_P , endliche Teilmengen $E \subset \text{loc } P \subset \mathbb{C}^2$ sowie $A \subset X_P$ und einen Isomorphismus

$$\varphi : (\text{loc } P) \setminus E \xrightarrow{\cong} X_P \setminus A .$$

Nach dem zweiten Unterpunkt des vorigen Satzes ist X_P bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmt.

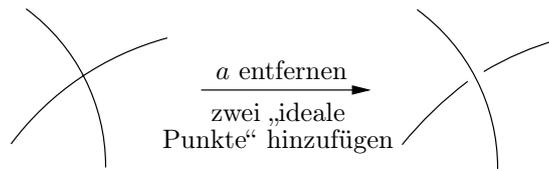
2. Es gibt holomorphe Funktionen $F_j : X_P \rightarrow \mathbb{C}P^1$ (bzw. meromorphe Funktionen auf X_P) für $j = 1, 2$, sodass $F_j \circ \varphi(z_1, z_2) = z_j$ für $(z_1, z_2) \in (\text{loc } P) \setminus E$ gilt gemäß:

$$\begin{array}{ccc}
 (\text{loc } P) \setminus E & \xrightarrow{\varphi} & X_P \\
 \downarrow (z_1, z_2) \mapsto z_j & \circlearrowleft & \downarrow F_j \\
 \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}P^1
 \end{array}$$

Weiter gelten $P(F_1, F_2) = 0$ und $\deg F_j = \deg_{z_j} P(z_1, z_2)$.

Beweisidee: Wir müssen die Singularitäten in $\text{loc } P$ loswerden. Betrachten wir zwei gekreuzte Linien mit dem Schnittpunkt a . Durch das Entfernen von a und Hinzufügen zweier „idealer Punkte“ erhält man das Gewünschte.

1. Singularitäten sehen im Allgemeinen kompliziert aus.
2. Man muss auch mindestens einen Punkt im Unendlichen hinzufügen, um $\text{loc } P$ kompakt zu machen.



Bemerkung: Seien X und Y zwei topologische Räume, wobei Y zusammenhängend und X lokal zusammenhängend sein soll, und $\pi : X \rightarrow Y$ eine n -blättrige Überdeckung. Die Zusammenhangskomponenten von X bezeichnen wir mit $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Für jedes α ist dann die Einschränkung

$$\pi_\alpha := \pi|_{X_\alpha} : X_\alpha \rightarrow Y$$

wieder eine neue Überlagerung.² Für alle $y \in Y$ gilt dann

$$n = \#\pi^{-1}(y) = \sum_{\alpha} \#\pi_\alpha^{-1}(y) = \sum_{\alpha} n_\alpha,$$

wobei n_α die Blätterzahl von π_α ist.

12.4. Anwendungen und Beispiele

Satz 57: In der Situation der vorigen Bemerkung sind äquivalent:

1. Es gibt ein α mit $n_\alpha = 1$.
2. Es existiert eine stetige Funktion $s : Y \rightarrow X$ mit $\pi \circ s = \text{Id}_Y$.

Satz 58: Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \neq 0$ zwei ganze Zahlen und $0 \leq r < R \leq \infty$. Es existiert genau dann eine holomorphe Funktion f auf dem Kreisring

$$A_{r,R} := K_0(r, R) \stackrel{\text{def}}{=} \{z : r < |z| < R\}$$

mit $f(z)^m = z^n$, wenn $m|n$ gilt.

Beispiel: 1. Sei $m \in \mathbb{N}$ ungerade und $P(x, y) := x^2 + y^m$ irreduzibel. Dann ist (ähnlich wie in Satz 46) $V := (\text{loc } P) \setminus \{0, 0\}$ eine zusammenhängende Untermannigfaltigkeit von \mathbb{C}^2 und die Projektion $\pi : V \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $(x, y) \mapsto y$ eine 2-blättrige Überlagerung (wie im Beweis von Satz 51). Für $0 \leq r < R \leq \infty$ muss $\pi^{-1}(A_{r,R})$ zusammenhängend sein, sonst gäbe es eine holomorphe Funktion $g : A_{r,R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $(g(z))^2 + z^m = 0$. Widerspruch, denn $2 \nmid m!$

Also ist die nach Satz 56 erhaltene Riemannsche Fläche $X_P = V \amalg \{\text{zwei Punkte}\}$ und $f := F_2 : X_P \rightarrow \mathbb{C}P^1$ mit $\deg(f) = 2$ so, dass

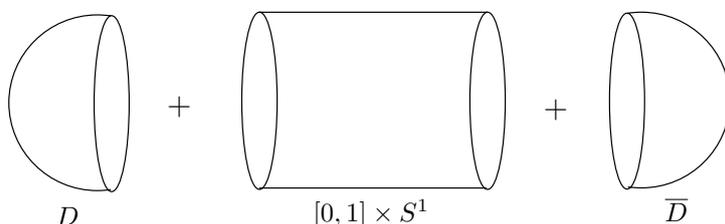
$$\#f^{-1} = \begin{cases} 1 & : p = 0, \infty \\ 2 & : \text{sonst} \end{cases}$$

²Dazu bedenke man, dass $\pi_\alpha^{-1}(V) = \bigcup \{U_j : U_j \subset X_\alpha\}$ gilt.

gilt. Aus dem Satz 54 von Überlagerungen über D' folgt, dass $f^{-1}(\overline{A_{1,2}}) \approx [0, 1] \times S^1$ ist, genauso wie $f^{-1}(\overline{A_{0,1}}) = f^{-1}(\overline{D}) \approx f^{-1}(\overline{A_{2,\infty}}) \approx \overline{D}$ gilt:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}' & \xrightarrow{h} & V \\
 \text{biholomorph} & & \\
 \downarrow z \mapsto z^2 & & \downarrow \pi \\
 \mathbb{C}' & & \mathbb{C}'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 g^{-1}(\overline{A_{1,2}}) = \overline{A_{1,\sqrt{2}}} \approx [0, 1] \times S^1 & & \\
 g^{-1}(A_{0,1}) = A_{0,1} = D' & \xrightarrow{h} & X_P \\
 & \text{eigentlich} & \uparrow u \\
 & & D \xrightarrow{\text{holomorph}} X_P \\
 & & 0 \mapsto \alpha_0
 \end{array}
 \quad (12.0)$$

Es ist also X_P die Verklebung einer oberen Sphärenhemisphäre, eines Zylinders und einer unteren Sphärenhälfte, was homöomorph zur S^2 ist, die wiederum zu $\mathbb{C}P^1$ diffeomorph ist. Später werden wir zeigen, dass sogar $X_P \cong \mathbb{C}P^1$ ist, also isomorph.



2. Sei nun $P(x, y) := x^2 + Q(y)$ irreduzibel mit $Q(y)$ als komplexes Polynom vom Grad $n \geq 1$ und mit getrennten Nullstellen, d.h. $Q(y) = c(y - b_1) \cdots (y - b_n)$ für paarweise verschiedene $b_j \neq b_k$ und $c \neq 0$. Hat nun $\text{loc } P$ Singularitäten? Sei $P(a, b) = 0$.

a) $a \neq 0$: Dann gilt

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b) = 2a \neq 0.$$

b) $a = 0$: Es gilt $b = b_j$ für ein passendes j und damit ist

$$\frac{\partial P}{\partial y}(0, b_j) = Q'(b_j) \neq 0$$

weil b_j eine einfache Nullstelle von Q ist (vgl. Beweis zu Satz 48).

Somit ist 0 ein regulärer Wert von P und $V := \text{loc } P \subset \mathbb{C}^2$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann ist $X_P = V \amalg F_2^{-1}(\infty)$ und $F_2 : X_P \rightarrow \mathbb{C}P^1$ vom Grad 2. Es ist $\#F_2^{-1}(\infty) = 1$ oder 2. Die Verzweigungspunkte der Projektion $\pi : V \rightarrow \mathbb{C}$ mit $(x, y) \mapsto y$ sind die $Q(y)$ -Nullstellen b_1, \dots, b_n .

Sei nun $R > \max |b_j|$. Dann ist $\#F_2^{-1}(\infty) = 2$ genau dann, wenn $\pi^{-1}(A_{R,\infty})$ nicht zusammenhängend ist, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn es eine holomorphe Funktion f auf $A_{R,\infty}$ mit $(f(z))^2 + Q(z) = 0$ für $|z| > R$. Dies ist für $r := R^{-1}$ äquivalent dazu, dass es eine holomorphe Funktion $g(z) := if(\frac{1}{z})$ auf $A_{0,r}$ mit $(g(z))^2 = Q(\frac{1}{z})$ für $0 < |z| < r$ gibt. Dann ist

$$Q\left(\frac{1}{z}\right) = z^{-n}(a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n)$$

mit $a_0 \neq 0$. Für $r > 0$ hinreichend klein existiert ein holomorphes h auf $A_{0,r}$ mit

$$(h(z))^2 = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$$

für $0 < |z| < r$. Wir suchen also eine g mit $(g(z))^2 = z^{-n}(h(z))^2$ für $0 < |z| < r$, was äquivalent zu

$$\left(\frac{g(z)}{h(z)}\right)^2 = z^{-n}$$

ist. Ein solches g gibt es genau dann, wenn n gerade ist. Also ist

$$\#F_2^{-1}(\infty) = \begin{cases} 1 & : n \text{ ungerade} \\ 2 & : n \text{ gerade} \end{cases} .$$

Dies impliziert, dass für die Anzahl der Verzweigungspunkte gilt

$$\# \{ \text{Verzweigungspunkte von } F_2 : X_P \longrightarrow \mathbb{CP}^1 \} = \begin{cases} n+1 & : n \text{ ungerade} \\ n & : n \text{ gerade} \end{cases}$$

3. Betrachte das Polynom $P(z) := z^3 - 3z$, dann gilt für $|z| > 2$ die Abschätzung

$$|P(z)| = |z^3 - 3z| = |(z^2 - 3)z| = |z^2 - 3| \cdot |z| \geq |z| .$$

Dann sind die Urbilder beschränkter Mengen beschränkt, denn für eine beschränkte Teilmenge $B \subset \mathbb{C}$ gilt $B \subset D_r$ und damit

$$P^{-1}(B) \subset \begin{cases} D_2 & : r \leq 2 \\ D_r & : r \geq 2 \end{cases} .$$

Außerdem ist P als Polynom holomorph, Urbilder abgeschlossener Mengen sind also wieder abgeschlossen. Folglich sind Urbilder kompakter Mengen kompakt und damit ist P eine eigentliche Funktion.

Fassen wir dies zusammen, so ist $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, eigentlich und nicht konstant, und da \mathbb{C} eine Riemannsche Fläche ist, ist nach Satz 24 von Seite 78 der Grad $\mathfrak{d}_y = \deg(P)$ unabhängig von y . Die Verzweigungspunkte des Polynoms liegen dort vor, wo die Ableitung $P'(z)$ verschwindet. Diese Nullstellen finden sich bei

$$P'(z) = 3z^2 - z = 0 \iff z^2 = 1 \iff z = \pm 1 ,$$

für die Funktionswerte gilt $P(1) = -2$ und $P(-1) = 2$, $z = \pm 1$ sind also die einzigen beiden Verzweigungspunkte.

Da P ein Polynom vom Grad 3 ist und die Urbilder der Null alle die Vielfachheit 1 haben, muss die Null somit drei Urbilder haben. Damit ist $\mathfrak{d}_0 = 3$ und dieser Wert ist konstant für alle $y \in \mathbb{C}$. Es gilt $P(1) = -2$ und $P(-2) = -8 + 6 = -2$. Da $v_1(f) \geq 2$ ist (da die 1 ein Verzweigungspunkt ist), hat -2 höchstens diese zwei Urbilder. Ähnlich sind $P(-1) = 2$ und $P(2) = 8 - 6 = 2$ alle Urbilder von 2.

Somit ist $P : X \longrightarrow Y$ wohldefiniert und hat keine Verzweigungspunkt, da diese gerade herausgenommen wurden. Da $P(\{\pm 1, \pm 2\}) \subset \{\pm 2\}$ ist, gilt für jedes $z \neq \pm 2$ dann $P^{-1}(z) \subset X$, also hat jeder Punkt $z \in Y$ genau drei Urbilder unter P .

12.5. Isomorphiesätze

12.5.1. Isomorphie mit der homogenen Form eines Polynoms

Definition 59 (Homogene Form): Die **homogene Form eines Polynoms** $P(w_1, \dots, w_n)$ vom Grad $d \geq 1$ ist definiert durch

$$P_0(z_0, \dots, z_n) := z_0^d P\left(\frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0}\right).$$

Bemerkung: Es gilt $\text{loc } P_0 = \{[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{C}\mathcal{P}^n : P_0(z_0, \dots, z_n) = 0\}$, d.h. der **Locus eines homogenen Polynoms ist kompakt**, da $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$ kompakt ist.

Beispiel: Sei $P(y, z) := y + z + yz^2$ mit $\deg P = 3$, dann ist $P_0(x, y, z) = x^2y + x^2z + yz^2$ das homogene Polynom. Sei $U_0 := \{[z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{C}\mathcal{P}^n : z_0 \neq 0\}$ eine der Kartenumgebungen des komplexen projektiven Raums $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$, sodass

$$\varphi_0^{-1} : \mathbb{C}^n \longrightarrow U_0 \quad (w_1, \dots, w_n) \mapsto [1, w_1, \dots, w_n]$$

gilt, dann ist $U_0 \cap \text{loc } P_0 = \varphi_0^{-1}(\text{loc } P)$.

Satz 60: Sei $P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ ein irreduzibles Polynom. Falls $\text{loc } P_0 \subset \mathbb{C}\mathcal{P}^2$ der homogenen Form eine komplexe Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}\mathcal{P}^2$ ist, so ist $\text{loc } P_0$ isomorph zu X_P .

Beispiel: 1. Sei $P(x, y) := a_0 + a_1x + a_2y$ mit $a_1 \neq 0$ oder $a_2 \neq 0$, dann gilt für die zugehörige homogene Form des Polynoms,

$$P_0(z_0, z_1, z_2) = \sum_{i=0}^2 a_i z_i,$$

dass $\text{loc } P_0 \simeq \mathbb{C}\mathcal{P}^1$ ist.³

2. Sei $P(x, y) := x^2 + y^2 + 1$, dann ist die homogene Form

$$P_0(z_0, z_1, z_2) = \sum_{i=0}^2 z_i^2$$

und es gilt $X_P \approx \text{loc } P_0$. Wir wissen bereits, dass $\text{loc } P_0 \subset \mathbb{C}\mathcal{P}^2$ eine Untermannigfaltigkeit ist.

12.5.2. Meromorphe Funktion und die Koordinatenfunktionen

Definition 61 (Hauptideal): Falls R ein kommutativer Ring ist, dann bezeichnet $(a) := Ra$ das von $a \in R$ erzeugte **Hauptideal**.

Bemerkung: Sie L ein Körper, $K \subset L$ ein Unterkörper und $a \in L$ algebraisch über K . Dann ist

$$J := \{P(x) \in K[x] : P(a) = 0\}$$

ein Ideal in $K[x]$. Es gilt $J = (Q)$ für genau ein monisches Polynom $Q(x)$, da $K[x]$ ein Hauptidealring ist. Q kann nicht konstant sein, sonst folgt $1 = 0$, was sicherlich ein Widerspruch ist. Also ist Q irreduzibel sowie Q ist das monische Polynom kleinsten Grades mit $Q(a) = 0$ und heißt **Minimalpolynom von a** . Für $a = 0$ ist beispielsweise $Q(x) = x$.

³Dies explizit zu zeigen ist eine Übungsaufgabe.

Lemma 62: Es gilt $[K(a) : K] = \deg Q$.⁴

Satz 63: Sei $P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ irreduzibel. Dann ist der Funktionenkörper $\mathcal{M}(X_P) = \mathbb{C}(F_1, F_2)$, wobei $F_j : X_P \rightarrow \mathbb{C}\mathcal{P}^1$ der j -ten Koordinatenfunktion z_j auf $\text{loc } P$ entspricht.

Bemerkung: Sei $P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ irreduzibel. Dann ist das von (P) erzeugte Ideal ein sogenanntes **Primideal** in $\mathbb{C}[x, y]$, d.h. wenn $Q_1 Q_2 \in (P)$ liegt, so ist entweder $Q_1 \in (P)$ oder $Q_2 \in (P)$. Dann ist

$$R := \mathbb{C}[x, y]/(P)$$

ein **Integritätsbereich**.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}[x, y] & \longrightarrow & \mathcal{M}(X_P) \\
 \downarrow & \nearrow & \cong \uparrow \sigma \\
 R & \longrightarrow & \text{Frac}(R)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cc}
 x \mapsto F_1 & y \mapsto F_2
 \end{array}$$

σ ist surjektiver Körperhomomorphismus $\neq 0$, also ein Isomorphismus. Also gilt $\mathcal{M}(X_P) \cong \text{Frac}(\mathbb{C}[x, y]/(P))$.

Satz 64: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $f_1, f_2 \in \mathcal{M}(X)$ zwei meromorphe Funktionen mit $\mathcal{M}(X) = \mathbb{C}(f_1, f_2)$. Das Polynom $P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ sei irreduzibel mit $P(f_1, f_2) = 0$. Dann existiert genau ein $u : X \rightarrow X_P$ mit $u^*(F_j) = f_j$.

Bemerkung: Solche f_1, f_2, P gibt es immer.

12.5.3. Abschließende Isomorphiesätze

Korollar 65: Jede kompakte Riemannsche Fläche ist isomorph zu X_P für ein passendes Polynom P .

Satz 66: Zwei kompakte Riemannsche Flächen X und Y sind genau dann isomorph, wenn $\mathcal{M}(X)$ und $\mathcal{M}(Y)$ als \mathbb{C} -Algebren isomorph sind, d.h. wenn es einen \mathbb{C} -linearen Körperisomorphismus $\sigma : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(Y)$ gibt.

Definition 67 (Hyperelliptisch): Eine kompakte Riemannsche Fläche X heißt **hyperelliptisch**, falls die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

1. Es existiert eine holomorphe Abbildung $X \rightarrow \mathbb{C}\mathcal{P}^1$ vom Grad 2.
2. Es existiert eine meromorphe Funktion auf X mit genau zwei Polen (mit Vielfachheit gezählt).

Satz 68: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $g : X \rightarrow \mathbb{C}\mathcal{P}^1$ holomorph und vom Grad 2. Außerdem seien a_1, \dots, a_k die kritischen Werte von g ungleich ∞ . Dann gelten die folgenden beiden Aussagen:

1. $k \geq 1$, d.h. es gibt mindestens einen kritischen Wert ungleich ∞ .
2. Sei $P(x, y) = x^2 + (y - a_1) \cdots (y - a_k)$ ein Polynom, dann gibt es einen Isomorphismus $u : X \xrightarrow{\cong} X_P$ mit $u^*(F_2) = g$, wobei F_2 die Projektion auf y sei.

⁴Der Beweis dieses Lemma ist eine Übungsaufgabe.

Beispiel: 1. Sei $X := \mathbb{C}\mathcal{P}^1$ und $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ eine rationale Funktion, wobei P und Q keine gemeinsamen Nullstellen haben. R definiert eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\mathcal{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathcal{P}^1$, sodass

$$f([1, z]) = \begin{cases} [1, R(z)] & : Q(z) \neq 0 \\ [Q(z), P(z)] & : z \in \mathbb{C} \end{cases}$$

gilt.⁵

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $X := \mathbb{C}/\Omega$ der zugehörige Torus. Dann ist $[1, \wp, \wp'] : X \rightarrow \mathbb{C}\mathcal{P}^2$ eine Einbettung, und das Bild entspricht $\text{loc } P_0$ des Polynoms

$$P(x, y) = x^2 - 4(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)$$

wenn die e_j verschieden sind. Die Halbwerte e_j hatten wir im Kapitel über elliptische Funktionen gleich

$$e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 = \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \quad \text{und} \quad e_3 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$$

gesetzt. Folglich sind $\mathbb{C}\mathcal{P}^1$ und \mathbb{C}^2 hyperelliptisch.⁶

12.6. Das Geschlecht einer Mannigfaltigkeit

Wie sieht nun eigentlich eine konkrete Riemannsche Fläche aus? Ein Satz aus der Differentialtopologie liefert und dazu folgendes.

Satz 69: Jede kompakte zusammenhängende orientierbare glatte (reelle) 2-Mannigfaltigkeit ist zu einer der Flächen aus Abbildung 12.1 diffeomorph.

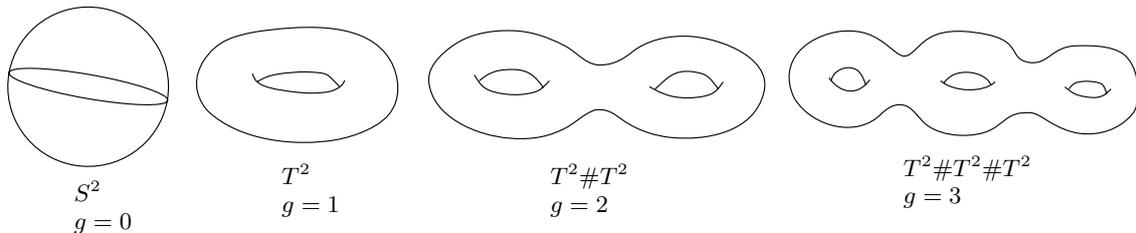


Abbildung 12.1.: Die ersten vier Geschlechter einer geschlossenen reellen 2-Mannigfaltigkeit.

Sei $P(z_0, z_1, z_2)$ ein homogenes Polynom vom Grad $d \geq 1$ und regulär (d.h. $\text{loc } P \subset \mathbb{C}\mathcal{P}^2$ ist eine Untermannigfaltigkeit), dann sei g das **Geschlecht** von $\text{loc } P$, wir definieren dieses später auf Seite 118 noch einmal präzise.

Wie hängt nun das Geschlecht von den Koeffizienten des Polynoms P ab? Weil g nur diskrete Werte annimmt, erwartet man, dass $g(\text{loc } P_t)$ für jeden stetigen Weg $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ von regulären homogenen Polynomen vom Grad d konstant ist. Wir setzen

$$H_d := \{\text{homogene Polynome } P(z_0, z_1, z_2) \text{ vom Grad } d\}$$

⁵Als Übungsaufgabe soll $\deg(f) = \max(\deg(P), \deg(Q))$ gezeigt werden.

⁶Einige Autoren betrachten diese Beispiele allerdings nicht als hyperelliptisch.

und $A_d \subset H_d$ die nicht regulären Polynome. Die Frage ist also, ob $H_d \setminus A_d$ wegzusammenhängend ist oder nicht. Nun gilt $H_d = \mathbb{C}^N$ für ein passendes $N = N(d)$. Man erwartet intuitiv eine Relation

$$\dim_{\mathbb{C}} A_d < \dim_{\mathbb{C}} H_d = N,$$

und $\dim_{\mathbb{R}} H_d - \dim_{\mathbb{R}} A_d \geq 2$.

Im Allgemeinen gilt: Falls W eine glatte Mannigfaltigkeit und $V \subset W$ eine Untermannigfaltigkeit mit $\dim W - \dim V \geq 2$ ist und γ ein glatter Weg in W von x nach y für $x, y \in W \setminus V$, dann ist $\gamma \cap V$ für alle t mit $\gamma(t) \in V$. Aus der Transversalitätseigenschaft

$$\underbrace{\text{im}(D\gamma_t)}_{\dim \leq 1} + \underbrace{T_{\gamma(t)}V}_{\dim V} = T_{\gamma(t)}W$$

folgt $\text{im}(D\gamma_t) \cap V = \emptyset$, also ist $W \setminus V$ wegzusammenhängend. Wir erwarten also, dass das Geschlecht $g(\text{loc } P)$ nur vom Grad d des Polynoms abhängt.

12.7. Topologie von Hyperflächen in $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$

Definition 70 (Regulär/Nicht-singulär): Ein homogenes Polynom $P(z_0, \dots, z_n)$ heißt **regulär** (und $\text{loc } P \subset \mathbb{C}\mathcal{P}^n$ **nicht-singulär**), falls 0 ein regulärer Wert von $P : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ist.

Bemerkung: 1. „Regulär“ ist nicht die übliche Terminologie für die obige Definition.

2. Für $n \geq 2$ folgt aus P regulär auch, dass P irreduzibel ist.

3. Der Hilbertsche Nullstellensatz sagt aus: Falls P und Q irreduzibel sind und $\text{loc } P = \text{loc } Q$ gilt, so ist $P = cQ$ für ein $c \in \mathbb{C}^*$.

Satz 71: Sei $P(z_0, \dots, z_n)$ homogen. Für $j = 0, \dots, n$ sei die Funktion

$$\psi_j : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \quad (w_1, \dots, w_n) \mapsto (w_1, \dots, w_j, 1, w_{j+1}, \dots, w_n)$$

definiert. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

1. Das Polynom P ist regulär.

2. Für $j = 0, \dots, n$ ist 0 ein regulärer Wert von $P \circ \psi_j$.

Bemerkung: Sind (U_j, ψ_j) die üblichen Karten für den komplexen projektiven Raum $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$, dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} & \\ \psi_j \nearrow & \downarrow & \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow[\psi_j^{-1}]{\approx} & \mathbb{C}\mathcal{P}^n \end{array}$$

Definition 72 (Algebraische Menge): Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}^n$ heißt **algebraisch**, falls es endlich viele Polynome $P_j(w_1, \dots, w_n)$ mit $j = 1, \dots, r$ gibt, sodass

$$A := \{w \in \mathbb{C}^n : P_j(w) = 0 \text{ für } j = 1, \dots, r\}$$

gilt.

Satz 73: Falls $A \subset \mathbb{C}^n$ algebraisch und $A \neq \mathbb{C}^n$ ist, so ist das Komplement $\mathbb{C}^n \setminus A$ wegzusammenhängend.

Satz 74 (Eliminationssatz): Für $j = 1, \dots, r$ sei $P_j(u, z) := P_j(\underbrace{u_1, \dots, u_m}_u, \underbrace{z_1, \dots, z_m}_z)$ ein komplexes Polynom, das homogen vom Grad $d_j \geq 1$ in z ist, d.h.

$$P_j(u, tz) = t^{d_j} P_j(u, z)$$

für alle $t \in \mathbb{C}$. Außerdem sei

$$B := \{(u, [z]) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}\mathcal{P}^n : P_j(u, z) = 0 \text{ für } j = 1, \dots, r\}$$

die Nullstellenmenge. Sei $\pi_1 : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}\mathcal{P}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ die Projektion, dann ist $\pi_1(B) \subset \mathbb{C}^m$ algebraisch.⁷

Satz 75 (Ehresmannscher Faserungssatz): Seien X und Y zwei glatte Mannigfaltigkeiten und $f : X \rightarrow Y$ eine eigentliche surjektive Submersion. Dann existiert für jedes $y \in Y$ eine offene Umgebung $V \subset Y$ und einen Diffeomorphismus $\varphi : f^{-1}(y) \times V \rightarrow f^{-1}(V)$ mit $f(\varphi(q, v)) = v$ für alle $(q, v) \in f^{-1}(y) \times V$:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(y) \times V & \xrightarrow[\approx]{\varphi} & f^{-1}(V) \\ & \searrow \pi_2 \quad \circlearrowleft & \swarrow f \\ & & V \end{array} .$$

Insbesondere gilt: Falls Y zusammenhängend ist, so gilt $f^{-1}(y_1) \approx f^{-1}(y_2)$ für alle $y_1, y_2 \in Y$.⁸

Lemma 76: Seien G, L und K drei abelsche Gruppen sowie $\alpha : G \rightarrow K$ und $\beta : G \rightarrow L$ zwei surjektive Gruppenhomomorphismen. Dann gilt

$$\alpha|_{\ker \beta} \text{ surjektiv} \iff \beta|_{\ker \alpha} \text{ surjektiv} .$$

Satz 77: Sei $n \geq 1$ und P, Q zwei homogene reguläre Polynome in z_0, \dots, z_n vom Grad $d \geq 1$. Dann ist $\text{loc } P \approx \text{loc } Q$, d.h. die beiden Nullstellenmengen sind diffeomorph zueinander.

Satz 78: Sei $P(z_0, z_1, z_2)$ ein reguläres homogenes Polynom vom Grad $d \geq 1$.

1. $d = 1, 2$: Dann ist $\text{loc } P \subset \mathbb{C}\mathcal{P}^2$ isomorph zu $\mathbb{C}\mathcal{P}^1$.
2. $d = 3$: Dann ist $\text{loc } P \subset \mathbb{C}\mathcal{P}^2$ diffeomorph zu $S^1 \times S^1$.

⁷Für einen Beweis siehe „Moderne Algebra II“ von VAN DER WAERDEN.

⁸Siehe „Introduction to Differential Topology“ (nur in der englischen Auflage) von BRÖCKER und JÄNICH.

13. Garben und Garbencohomologie

Im späteren Verlauf werden wir oft das Definitionsgebiet von Funktionen wechseln. Eine elegante Möglichkeit dies durchzuführen ist die Verwendung von Garben, die eine brauchbare formale Umgebung dafür bieten.

13.1. Garben, Prägarben und Halme

Aus diesem Grund werden wir nun einen Abstecher in die Garbentheorie tätigen. Die beiden wichtigsten Objekte sind die folgenden:

Definition 79 (Prägarbe): Eine **Prägarbe** \mathcal{F} von Gruppen auf einem topologischen Raum X besteht aus den folgenden Elementen:

1. Für jede offene Teilmenge $U \subset X$ haben wir eine Gruppe $\mathcal{F}(U)$.
2. Für jedes Paar U und V offener Mengen von X mit $V \subset U$ haben wir einen Gruppenhomomorphismus $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$, die sogenannte Einschränkungabbildung.

Diese sollen die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. $\mathcal{F}(\emptyset) = \{1\}$
2. $\rho_{UU} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ ist die Identitätsabbildung.
3. Falls $W \subset V \subset U \subset X$ alle offenen Teilmengen sind, so gilt $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

Analog kann man auch Prägarben von Mengen, abelschen Gruppen, Vektorräumen, usw. definieren. Ist $s \in \mathcal{F}(U)$, so schreibt man für die Einschränkungabbildung kurz $s|_V := \rho_{UV}(s)$.

Beispiel: 1. Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{C}_X = \mathcal{C}_{X;\mathbb{C}}$ die Prägarbe von komplexen Vektorräumen. Mit $\mathcal{C}_X(U) := \{\text{stetige Funktionen } U \rightarrow \mathbb{C}\}$ und $\rho_{UV}(f) = f|_V$ ist die Gruppe definiert, wobei die Gruppenstruktur klar ist, da Summen und Produkte stetiger Funktionen stetig sind.

2. Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{E}_X(U) := \{\text{glatte Funktionen } U \rightarrow \mathbb{C}\}$.

3. Sei X eine kompakte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{O}_X(U) := \{\text{holomorphe Funktionen } U \rightarrow \mathbb{C}\}$.

4. Sei X eine Riemannsche Fläche und $\mathcal{M}_X(U) := \mathcal{M}(U) \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{meromorphe Funktionen auf } U\}$.

Definition 80 (Garbe): Eine Prägarbe \mathcal{F} auf X heißt **Garbe**, falls für jede Familie $\{U_j\}_{j \in J}$ von offenen Teilmengen von X und $U := \bigcup_{j \in J} U_j$ die folgenden **zwei Garbenaxiome** erfüllt sind:

S1 Sind $s, t \in \mathcal{F}(U)$ Gruppenelemente mit $s|_{U_j} = t|_{U_j}$ für alle $j \in J$, so folgt $s = t$.

S2 Seien Elemente $s_j \in \mathcal{F}(U_j)$ vorgegeben mit $s_j|_{U_j \cap U_k} = s_k|_{U_j \cap U_k}$ für alle $j, k \in J$. Dann existiert ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s|_{U_j} = s_j$ und $s|_{U_k} = s_k$.

Wir werden später die algebraischen Auswirkungen dieser zusätzlichen Forderungen genauer untersuchen und Folgerungen daraus ziehen.

Definition 81 (Halme): Sei \mathcal{F} eine Prägarbe von Gruppen auf dem topologischen Raum X . Jedem Punkt $a \in X$ ordnen wir eine Gruppe \mathcal{F}_a zu, dies ist der sogenannte **Halm von \mathcal{F} in a** . Als Menge sei $\mathcal{N}_a := \mathcal{N}_a(X) := \{\text{offene Umgebungen von } a \text{ in } X\}$, dann ist

$$\mathcal{F}_a := \left(\underbrace{\bigcup_{U \in \mathcal{N}_a} \{U\} \times \mathcal{F}(U)}_{\text{Disjunkte Vereinigung der Mengen } \mathcal{F}(U) \text{ für } U \in \mathcal{N}_a} \right) / \sim$$

wobei die Äquivalenzrelation \sim durch

$$(U, s) \sim (V, t) \iff \text{es existiert eine Umgebung } w \in \mathcal{N}_a \text{ mit } W \subset U \cap V \text{ und } s|_W = t|_W$$

definiert ist. Die Äquivalenzklasse $s_a := [U, s]_a$ von (U, s) heißt **Keim von s in a** . Die übliche Notation für den Halm in a , also die Menge der Äquivalenzklassen, ist

$$\mathcal{F}_a := \varinjlim_{U \in \mathcal{N}_a} \mathcal{F}(U),$$

der sogenannte induktive Limes. Die Gruppenstruktur auf \mathcal{F}_a erhalten wir durch

$$[U, s]_a [V, t]_a := [W, (s|_W)(t|_W)]_a$$

für irgendein $W \in \mathcal{N}_a$ mit $W \subset U \cap V$ (die Definition ist unabhängig von W). Dabei ist $1 := [U, 1]$ das Einselement, für abelsche Gruppen schreibt man meist 0 statt 1.

Bemerkung: Es gibt eine Abbildung $\rho_a : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_a$ mit $s \mapsto s_a$, dies ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beispiel: Sei $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, die Garbe der ganzen Funktionen, d.h. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, dann wollen wir den Halm von \mathcal{O} am Punkt 0 näher betrachten. Eine ganze Funktion lässt sich an jedem Punkt in eine Taylorreihe entwickeln. Definiere

$$\varphi : \mathcal{O}_0 \rightarrow \left\{ \text{alle Potenzreihen } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ mit Konvergenzradius } > 0 \right\}$$

durch $[U, f]_0 \mapsto (\text{Taylorreihe von } f \text{ in } 0)$. φ ist ein Isomorphismus von komplexen Vektorräumen.

13.2. Der Étale-Raum einer Prägarbe

Wir wollen nun den topologischen Raum betrachten, der zu einer Prägarbe gehört. Dabei werden wir einige Parallelen zu Faserbündel finden, was den Garbenbegriff anschaulicher macht.

Definition 82 (Étale-Raum): Sei \mathcal{F} eine Prägarbe von Gruppen auf dem topologischen Raum X . Wir definieren den topologischen Raum

$$\tilde{\mathcal{F}} := \bigcup_{a \in X} \{a\} \times \mathcal{F}_a = \coprod_{a \in X} \mathcal{F}_a$$

als **Étale-Raum**. Für jedes Gruppenelement $s \in \mathcal{F}(U)$ definiere $\tilde{s} : U \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ mit $a \mapsto s_a$.

Wir müssen auf dem Étale-Raum noch eine Topologie spezifizieren, dies machen wir durch Angabe einer Basis der Topologie¹ im folgenden Satz.

- Satz 83:** 1. $\mathcal{B} := \{\tilde{s}(U) : U \subset X \text{ offen}, s \in \mathcal{F}(U)\}$ ist eine Basis für eine Topologie auf $\tilde{\mathcal{F}}$.
2. Für diese Topologie ist die Projektion $\pi : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow X$ mit $s_p \rightarrow p$ für $s_p \in \mathcal{F}_p$ ein lokaler Homöomorphismus und die Gruppenoperationen auf $\tilde{\mathcal{F}}$ sind stetig im folgenden Sinne: Sei $\tilde{\mathcal{F}} \circ \tilde{\mathcal{F}} := \{(\alpha, \beta) \in \tilde{\mathcal{F}} \times \tilde{\mathcal{F}} : \pi(\alpha) = \pi(\beta)\}$ mit der Unterraumtopologie, dann ist $\tilde{\mathcal{F}} \circ \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ mit $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta^{-1}$ stetig.

Definition 84 (Schnitt): Sei \mathcal{F} eine Prägarbe auf X , $\tilde{\mathcal{F}}$ der Étale-Raum und $\pi : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}$ die Projektion. Ein **Schnitt von $\tilde{\mathcal{F}}$ über $U \subset X$** ist eine stetige Abbildung $s : U \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ mit $\pi \circ s = \text{Id}_U$.

Die von jeder beliebigen Prägarbe \mathcal{F} erzeugte Garbe $\tilde{\mathcal{F}}$ ist definiert durch

$$\tilde{\mathcal{F}}(U) := \Gamma(U, \tilde{\mathcal{F}}) := \{\text{alle Schnitte von } \tilde{\mathcal{F}} \text{ über } U\}.$$

Falls $V \subset U \subset X$ offene Mengen sind und $s \in \tilde{\mathcal{F}}(U)$ ist, dann gilt $\rho_{UV}(s) = s|_V$.

Satz 85: Sei \mathcal{F} eine Prägarbe auf X , $U \subset X$ offen, $r \in \tilde{\mathcal{F}}(U)$ ein Schnitt und $p \in U$. Dann existiert ein offenes $W \subset U$ und ein Gruppenelement $t \in \mathcal{F}(W)$ mit $r(q) = t_q$ für alle $q \in W$, d.h. $r|_W = \tilde{t}$ für $t \in \Gamma(W, \tilde{\mathcal{F}})$. Umgekehrt ist \tilde{s} stetig für alle $s \in \mathcal{F}(U)$.

Beispiel: Betrachte die folgende Prägarbe \mathcal{O}^B komplexer Vektorräume über \mathbb{C} , wobei

$$\mathcal{O}^B(U) := \{\text{beschränkte holomorphe Funktionen auf } U\}$$

ist. Dann ist das Garbenaxiom S1 erfüllt, aber nicht S2: Für jedes beschränkte $U \subset \mathbb{C}$ ist die Funktion $z \mapsto z$ beschränkt auf U und ist daher ein Element von $\mathcal{O}^B(U)$, aber die Funktion z ist auf \mathbb{C} nicht beschränkt.

Man hat aber $\mathcal{O}_p^B \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_p$ für alle p , deshalb gilt es einen Homöomorphismus $\tilde{\mathcal{O}}^B \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}$.

13.3. Garben-Abbildungen und algebraische Objekte

13.3.1. Homomorphismen und die Verbindung zu Schnitten

Definition 86 (Prägarben-Homomorphismus): Ein Homomorphismus $h : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ zwischen zwei Prägarben von Gruppen auf X ist eine Familie $\{h_U\}_{U \subset X \text{ offen}}$, wo

$$h_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{h_U} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_{UV} \downarrow & & \downarrow \rho_{UV} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{h_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist, sodass für alle $V \subset U$ offen und $U \subset X$ offen das obige Diagramm kommutiert.

Definition 87 (Unterprägarben): \mathcal{F} heißt **Unterprägarbe von \mathcal{G}** , falls jedes h_U eine Inklusionsabbildung ist. h heißt **Garben-Isomorphismus**, falls jedes h_U ein Isomorphismus ist.

¹Eine **Basis der Topologie** ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset X$, sodass alle anderen offenen Teilmengen als beliebige Vereinigungen oder endliche Durchschnitte von Mengen aus \mathcal{B} dargestellt werden kann.

Im allgemeinen Fall gilt: Für jedes $p \in X$ definiert h einen Homomorphismus

$$h_p : \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{G}_p \quad s_p \mapsto [h_U(s)]_p$$

auf dem zugehörigen Halm falls U eine offene Umgebung von p und $s \in \mathcal{F}(U)$ ist.

Definition 88 (Garben-Schnitt-Abbildung): Sei \mathcal{F} eine Prägarbe auf X . Wir definieren einen Homomorphismus von Prägarben

$$\theta : \mathcal{F} \longrightarrow \bar{\mathcal{F}} \quad \theta_U(s) = \tilde{s} \quad \text{für } s \in \mathcal{F}(U)$$

Es sei daran erinnert, dass $\tilde{s}(p)$ der Keim s_p von s in p ist.

Satz 89: Sei \mathcal{F} eine Prägarbe auf X . Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

1. \mathcal{F} ist eine Garbe.
2. θ ist ein Isomorphismus.

Satz 90: Sei \mathcal{F} eine Prägarbe auf X . Dann ist θ_p , also

$$\theta_p : \mathcal{F}_p \xrightarrow{\cong} (\bar{\mathcal{F}})_p \quad s_p \mapsto (\tilde{s})_p$$

ein Isomorphismus für alle $p \in X$.

Satz 91: Sei $h : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ ein Homomorphismus zwischen Prägarben auf X . Dann ist $\tilde{h} : \bar{\mathcal{F}} \longrightarrow \bar{\mathcal{G}}$ ein lokaler Homöomorphismus und es existiert genau ein Homomorphismus $\bar{h} : \bar{\mathcal{F}} \longrightarrow \bar{\mathcal{G}}$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{h} & \mathcal{G} \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ \bar{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\bar{h}} & \bar{\mathcal{G}} \end{array}$$

13.3.2. Quotienten, Kern, Bild und Exaktheit von Garben

Definition 92 (Quotientengruppe): Sei A eine abelsche Gruppe und $B \subset A$ eine Untergruppe. Dann gibt es eine **Quotientengruppe**

$$A/B := \{a + B : a \in A\} = A/\sim \quad \text{mit} \quad a_1 \sim a_2 \iff a_1 - a_2 \in B$$

und der Addition $(a_1 + B) + (a_2 + B) = (a_1 + a_2) + B$.

Definition 93 (Exakte Sequenz): Eine Sequenz $A_0 \xrightarrow{f_0} A \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n$ heißt **exakt**, wenn für $j = 1, \dots, n-1$ gilt, dass $\text{im}(f_{j-1}) = \ker(f_j)$ ist.

Eine exakte Sequenz $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ heißt **kurze exakte Sequenz**. In diesem Fall induziert g einen Isomorphismus $B/f(A) \xrightarrow{\cong} C$, und für $A \subset B$ ist

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow B/A \longrightarrow 0$$

exakt.

Bemerkung: Falls beide Zeilen des Diagramms

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \alpha \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\
 0 & \longrightarrow & B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_3 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

exakt sind, und $\beta f_1 = g_1 \alpha$ gilt, dann existiert genau ein $\gamma : A_3 \rightarrow B_3$ mit $\gamma f_2 = g_2 \beta$.

Definition 94 (Garben-Kern und -Bild): Sei $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Homomorphismus zwischen zwei Garben abelscher Gruppen auf X . Dann bilden **Kern** und **Bild von f** wieder (Prä-)Garben:²

$$\begin{aligned}
 \ker(f) &:= [\text{die Garbe von } U \mapsto \ker(f_U)] & \text{mit} & \quad f_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \\
 \text{im}(f) &:= [\text{die von der Prägarbe } U \mapsto \text{im}(f_U) \text{ erzeugte Garbe}]
 \end{aligned}$$

Definition 95 (Exakte Garbenhomomorphismen-Sequenz): Eine Sequenz von Garbenhomomorphismen

$$\mathcal{F}_0 \xrightarrow{f_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} \mathcal{F}_n$$

auf X heißt **exakt**, wenn für alle $p \in X$ und $j = 1, \dots, n-1$ die Exaktheits-Eigenschaft $\text{im}((f_{j-1})_p) = \ker((f_j)_p)$ gilt, d.h. die Sequenz ist auf den Halmen exakt.

Satz 96: Falls $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Garbenhomomorphismen ist, dann ist die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{H}(U)$$

exakt für alle offenen $U \subset X$.

Bemerkung: Für exakte Sequenzen erhalten wir folgende Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \text{ exakt} &\iff \alpha \text{ injektiv} \\
 B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0 \text{ exakt} &\iff \beta \text{ surjektiv} \\
 0 \rightarrow A \xrightarrow{\gamma} B \rightarrow 0 \text{ exakt} &\iff \gamma \text{ bijektiv}
 \end{aligned}$$

Beispiel: 1. Ist die Garbensequenz $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ exakt, dann ist der lokale Gruppenhomomorphismus

$$f_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$$

injektiv für alle offenen Mengen U .

2. Ist $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \rightarrow 0$ exakt, dann sind die lokalen Gruppenhomomorphismen

$$f_U : \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\cong} \mathcal{G}(U)$$

Isomorphismen für alle offenen Mengen U .

²In einer Übungsaufgabe wird gezeigt werden, dass $\ker(f)_p = \ker(f_p)$ für $f_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ gilt, ähnlich auch für die Bilder $\text{im}(f)_p = \text{im}(f_p)$.

Definition 97 (Quotientengarbe): Sei \mathcal{G} eine Garbe abelscher Gruppen auf X und \mathcal{F} eine Untergarbe von \mathcal{G} . Die **Quotientengarbe** \mathcal{G}/\mathcal{F} ist die von der $U \mapsto \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ erzeugte Garbe.

Satz 98: Sei \mathcal{G} eine Garbe abelscher Gruppen auf X , \mathcal{F} eine Untergarbe von \mathcal{G} . Sei $g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{F}$ der natürliche Homomorphismus. Dann ist $g_p : \mathcal{G}_p \rightarrow (\mathcal{G}/\mathcal{F})_p$ surjektiv für alle $p \in X$ und der Kern $\ker(g_p) = \mathcal{F}_p$. Also induziert h_p einen Isomorphismus

$$\mathcal{G}_p/\mathcal{F}_p \xrightarrow{\cong} (\mathcal{G}/\mathcal{F})_p$$

und die Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{F} \rightarrow 0$ ist exakt.

Satz 99: Sei $g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ ein Homomorphismus zwischen Garben abelscher Gruppen auf X , sodass die auf den Halmen induzierte Abbildung $g_p : \mathcal{G}_p \rightarrow \mathcal{H}_p$ für alle $p \in X$ surjektiv ist, d.h. die Sequenz

$$\mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

ist exakt. Sei $\mathcal{F} := \ker(g)$. Dann ist der induzierte Homomorphismus $\mathcal{G}/\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$ ein Isomorphismus.

13.3.3. Beispiele zur Exaktheit von Garbenhomomorphismen

Beispiel: Sei X eine Riemannsche Fläche. Wir definieren die Garben $\mathcal{O}^* = \mathcal{O}_X^*$, \mathcal{M}^* und \mathcal{D} auf X wie folgt: Für $U \subset X$ offen sei

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^*(U) &:= \{\text{holomorphe Funktionen } U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}\} \\ \mathcal{M}^*(U) &:= \left\{ \begin{array}{l} \text{meromorphe Funktionen auf } U, \text{ die auf keiner offe-} \\ \text{nen Teilmenge identisch gleich Null sind} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Dann sind $\mathcal{O}^*(U)$ und $\mathcal{M}^*(U)$ multiplikative Gruppen. Außerdem sei

$$\mathcal{D}(U) := \{\text{Funktionen } \phi : U \rightarrow \mathbb{Z} \text{ mit } \phi^{-1}(0) \text{ offen und } U \setminus \phi^{-1}(0) \text{ diskret}\} .$$

Definiere den Garbenhomomorphismus $\varphi : \mathcal{M}^* \rightarrow \mathcal{D}$ wie folgt: Für $X = \mathbb{C}$ betrachte die Halme

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0^* &:= \left\{ \begin{array}{l} \text{Laurent-Reihen } \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n \neq 0, \text{ die in einer} \\ \text{punktierten Umgebung von } 0 \text{ konvergieren} \end{array} \right\} \\ \mathcal{Q}_0^* &:= \left\{ \begin{array}{l} \text{Potenzreihen } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ mit } a_0 \neq 0, \text{ die in} \\ \text{einer Umgebung von } 0 \text{ konvergieren} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

für $U \subset X$ offen, $p \in U$ und $f \in \mathcal{M}^*(U)$ sei

$$\varphi_U(f) := \text{ord}_p(f) \in \mathbb{Z} .$$

Dann erfüllt φ die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} (\varphi_U(f))^{-1}(\mathbb{Z}_+) &= \{\text{Nullstellen von } f \text{ in } U\} \\ (\varphi_U(f))^{-1}(\mathbb{Z}_-) &= \{\text{Pole von } f \text{ in } U\} \end{aligned}$$

also ist $(\varphi_U(f))^{-1}(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ diskret und relativ abgeschlossen, also $\varphi_U(f) \in \mathcal{D}(U)$. Die Multiplikationsformel $\text{ord}(f \cdot g) = \text{ord}(f) + \text{ord}(g)$ impliziert, dass φ ein Garbenhomomorphismus ist. Die Halmabbildung $\varphi_p : \mathcal{M}_p^* \rightarrow \mathcal{D}_p = \mathbb{Z}$ ist surjektiv für alle p , außerdem ist $\ker(\varphi_p) = \mathcal{O}_p^*$, damit ist

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow \mathcal{M}^* \xrightarrow{\varphi} \mathcal{D} \rightarrow 0$$

exakt und φ definiert nach dem vorigen Satz einen Isomorphismus $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}$.

Definition 100 (Divisor): Ein **Divisor auf X** ist ein Element von $\mathcal{D}(X)$, oder äquivalent von $(\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)(X)$. Falls $f \in \mathcal{M}^*(X)$ ist, so schreibt man $(f) := \varphi(f)$ für den Divisor.

Bemerkung: Ist X kompakt, dann ist der Divisor auf X die formale endliche Summe $\sum_j n_j p_j$, wo $n_j \in \mathbb{Z}$ und $p_j \in X$ ist. In der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^*(X) \longrightarrow \mathcal{M}^*(X) \xrightarrow{\varphi_X} \mathcal{D}(X)$$

ist φ_X nicht immer surjektiv:

Beispiel (Gegenbeispiel): Sei $X := \mathbb{C}/\Omega$ ein Torus und $p \in X$. Der Divisor $-p$ ist nicht der Divisor einer meromorphen Funktion, es existiert keine Funktion auf \mathbb{C}/Ω mit einem einzelnen, einfachen Pol.³

Was genau ist $\text{im}(\varphi_X)$? Um diese Frage sinnvoll zu beantworten, müssen wir uns mit Garbencohomologie beschäftigen.

13.4. Čech-Konstruktion und Garbencohomologie

13.4.1. Čech-Coketten, Čech-Ableitungsoperator und Čech-Cohomologie

Sei X ein topologischer Raum, \mathcal{F} eine Garbe abelscher Gruppen auf X und $\mathfrak{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine offene Überdeckung von X .

Definition 101 (Čech-Cokette): Eine n -Cokette C von \mathcal{F} bezüglich \mathfrak{U} ist eine Vorschrift, die jedem Multiindex $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in I^{n+1}$ ein Element

$$c(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_n})$$

zuordnet.

Beispiel: Für $n = 2$ ordnen wir jedem Schnitt $U_0 \cap U_1 \cap U_2$ ein Element in $\mathcal{F}(U_0 \cap U_1 \cap U_2)$ zu.

Wir untersuchen die Čech-Cokette genauer. Sei $C^n(\mathfrak{U}; \mathcal{F})$ die Menge aller solcher c , wie oben erklärt, dann ist für $n \geq 0$

$$C^n(\mathfrak{U}; \mathcal{F}) = \prod_{(\alpha_0, \dots, \alpha_n)} \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_n})$$

wieder eine abelsche Gruppe, für $n < 0$ definiere $C^n := \{0\}$. Definiere den **Ableitungsoperator**

$$d : C^n(\mathfrak{U}; \mathcal{F}) \longrightarrow C^{n+1}(\mathfrak{U}; \mathcal{F})$$

$$(dc)(\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1}) := \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j c(\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha_j}, \dots, \alpha_{n+1}) \Big|_{U_{\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1}}},$$

wobei letzterer Teil die Einschränkung auf dem Durchschnitt $U_{\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1}} := U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_{n+1}}$ sei. Damit haben wir bereits alle wichtigen Elemente der Čech-Cohomologie, wir müssen nur noch ein paar formale Eigenschaften nachweisen.

Satz 102: Die Zusammensetzung $C^n(\mathfrak{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{d} C^{n+1}(\mathfrak{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{d} C^{n+2}(\mathfrak{U}; \mathcal{F})$ ist 0 für alle n , d.h. es gilt $d^2 = 0$.

³Vergleiche mit dem Satz aus der Funktionentheorie I über elliptische Funktionen (Korollar 144 von Seite 53).

Definition 103 (Čech-Cohomologie): Wir definieren $Z^n := Z^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \ker(d : C^n \rightarrow C^{n+1})$ als n -Cozyklen und $B^n := B^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \operatorname{im}(d : C^{n-1} \rightarrow C^n)$ als n -Coränder. Wegen dem zuvor gezeigten $d^2 = 0$ liegen $B^n \subset Z^n$, also können wir

$$H^n := H^n(\mathfrak{U}; \mathcal{F}) := Z^n / B^n$$

als n -te Čech-Cohomologiegruppe von X mit Koeffizienten in \mathcal{F} bezüglich \mathfrak{U} definieren.

Satz 104: Die natürliche Abbildung $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\cong} H^0(\mathfrak{U}; \mathcal{F})$ ist ein Isomorphismus, unabhängig von der gewählten Überdeckung \mathfrak{U} .

13.4.2. Verfeinerungen von Überdeckungen

Aus der obigen Konstruktion ist unmittelbar ersichtlich, dass die Čech-Cohomologie fundamental von der Form der Überdeckungen \mathfrak{U} abhängt. Wir müssen daher nun die Auswirkungen untersuchen, die ein Wechsel eben dieser mit sich bringt. Dazu führen wir den folgenden Begriff ein.

Definition 105 (Überdeckungs-Verfeinerung): Seien $\mathfrak{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ und $\mathfrak{V} := \{V_\beta\}_{\beta \in J}$ offene Überdeckungen von X . Wir sagen dass \mathfrak{V} **feiner als (oder gleich)** \mathfrak{U} ist, $\mathfrak{V} \geq \mathfrak{U}$, wenn eine **Verfeinerungsabbildung** $\varphi : J \rightarrow I$ existiert, sodass für alle $\beta \in J$ gilt $V_\beta \subset U_{\varphi(\beta)}$.

Eine solche Verfeinerung φ definiert einen Homomorphismus $\varphi^* : C^n(\mathfrak{U}; \mathcal{F}) \rightarrow C^n(\mathfrak{V}; \mathcal{F})$ durch $c \mapsto \varphi^*(c)$, wobei gilt:

$$\varphi^*(c)(\beta_0, \dots, \beta_n) = \underbrace{c(\varphi(\beta_0), \dots, \varphi(\beta_n))}_{\in \mathcal{F}(U_{\varphi(\beta_0)}, \dots, U_{\varphi(\beta_n)})} \Big|_{V_{\beta_0, \dots, \beta_n}}$$

Wie sehen nun die Eigenschaften dieses Verfeinerungs-induzierten Homomorphismus φ^* aus? Dies beantworten die folgenden beiden Sätze.

Satz 106: Es gilt $d\varphi^* = \varphi^*d$, d.h. der Verfeinerungs-induzierte Homomorphismus vertauscht mit dem Ableitungsoperator.

Korollar 107: Ist $dc = 0$, so ist $d(\varphi^*c) = \varphi^*dc = 0$. Daraus folgt dann wiederum

$$\varphi^*Z^n(\mathfrak{U}; \mathcal{F}) \subset Z^n(\mathfrak{V}; \mathcal{F}) \quad \text{und} \quad \varphi^*B^n(\mathfrak{U}; \mathcal{F}) \subset B^n(\mathfrak{V}; \mathcal{F})$$

also folgt im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B^n(\mathfrak{U}; \mathcal{F}) & \longrightarrow & Z^n(\mathfrak{U}; \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^n(\mathfrak{U}; \mathcal{F}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi^* & & \downarrow \varphi^* & & \downarrow r_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} \\ 0 & \longrightarrow & B^n(\mathfrak{V}; \mathcal{F}) & \longrightarrow & Z^n(\mathfrak{V}; \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^n(\mathfrak{V}; \mathcal{F}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

die notwendige Existenz einer Abbildung $r_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} : H^n(\mathfrak{U}; \mathcal{F}) \rightarrow H^n(\mathfrak{V}; \mathcal{F})$. □

Die für uns wichtigste Aussage, welche die spätere Wohldefiniertheit der Garbencohomologie garantiert, ist die Invarianz der Restriktions-Abbildung $r_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}$ von der genauen Wahl der Verfeinerungsabbildung.

Satz 108: Diese Abbildung $r_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} : H^n(\mathfrak{U}; \mathcal{F}) \rightarrow H^n(\mathfrak{V}; \mathcal{F})$ hängt nicht von der Verfeinerungsabbildung φ ab.

Satz 109: Falls $\mathfrak{W} \geq \mathfrak{V} \geq \mathfrak{U}$ Verfeinerungen sind, so gilt für alle n die Zusammensetzung

$$r_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}} = r_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{V}} \circ r_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} : H^n(\mathfrak{U}; \mathcal{F}) \rightarrow H^n(\mathfrak{W}; \mathcal{F}).$$

13.4.3. Der induktive Limes

Definition 110 (Gerichtete Menge): Eine **gerichtete Menge** A ist eine Menge mit einer Relation „ \leq “, sodass die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. Reflexivität: $a \leq a$ für alle $a \in A$,
2. Transitivität: $a \leq b, b \leq c$, dann folgt $a \leq c$ für $a, b, c \in A$,
3. Für alle $a_1, a_2 \in A$ gibt es ein $b \in A$ mit $a_1 \leq b$ und $a_2 \leq b$.

Beispiel: 1. Sei X ein topologischer Raum und $A := \{\text{Offene Teilmengen von } X\}$. Dann ist $U \leq V \iff U \supset V$ und für alle U, V gilt $U \supset U \cap V$ und $V \supset U \cap V$.

2. Sei X ein topologischer Raum und $A := \{\text{Offene Überdeckungen von } X\}$. Dann gilt hier $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{V} \iff \mathfrak{V}$ *feiner als* \mathfrak{U} .

Definition 111 (Gerichtetes System): Sei A eine gerichtete Menge. Ein **A -gerichtetes System** abelscher Gruppen ist eine Familie $\{G_a\}_{a \in A}$ abelscher Gruppen und für jede Relation $a \leq b$ existiert ein Homomorphismus $f_a^b : G_a \rightarrow G_b$, sodass gilt:

1. $f_a^a = \text{Id}$,
2. $f_b^c \circ f_a^b = f_a^c$ falls $a \leq b \leq c$ ist.

Definition 112 (Induktiver Limes): Der **induktive Limes** $\varinjlim G_a = \varinjlim_a G_a$ ist als

$$\left(\bigcup_{a \in A} \{a\} \times G_a \right) / \sim \quad \text{mit} \quad (a_1, x_1) \sim (a_2, x_2) \iff \exists b \in A : f_{a_1}^b(x_1) = f_{a_2}^b(x_2)$$

definiert (dass \sim eine Äquivalenzrelation ist, folgt aus der Funktorialität), d.h. für $x_j \in G_{a_j}$ gilt

$$\begin{array}{ccc} x_1 \in G_{a_1} & & x_2 \in G_{a_2} \\ & \searrow & \swarrow \\ & G_b & \end{array}$$

Durch $[a, x]$ sind die **Äquivalenzklassen von (a, x) mit $x \in G_a$** bezeichnet. $\varinjlim G_a$ ist eine abelsche Gruppe mit

$$[a_1, x_1] + [a_2, x_2] := [b, f_{a_1}^b(x_1) + f_{a_2}^b(x_2)]$$

falls $a_1 \leq b$ und $a_2 \leq b$ ist (unabhängig von b). Für alle $a \in A$ ist

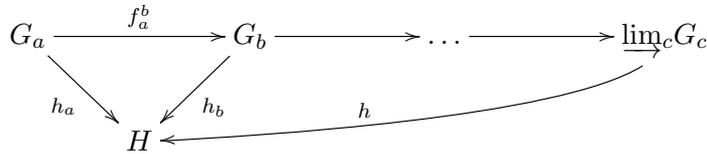
$$i_a : G_a \rightarrow \varinjlim_b G_b \quad x \mapsto [a, x]$$

ein Homomorphismus mit $i_a = i_b \circ f_a^b$ falls $a \leq b$ ist.

Spezialfall: Falls $x \in G_a$ und $a \leq b$ ist, so gilt $f_a^b(x) = f_b^b \circ f_a^b(x)$ und daraus folgt die Äquivalenz $(a, x) \sim (b, f_a^b(x))$.

Beispiel: Wir haben die Halme einer Garbe durch $\mathcal{F}_p := \varinjlim_{U \in \mathcal{N}_p} \mathcal{F}(U)$ definiert.

Satz 113 (Universelle Eigenschaft): Sei $\{G_a\}_{a \in A}$ ein gerichtetes System abelscher Gruppen, H eine abelsche Gruppe und $h_a : G_a \rightarrow H$ ein Homomorphismus für jedes $a \in A$, sodass $h_b \circ f_a^b = h_a$ für $a \leq b$ gilt, also



Dann existiert genau ein Homomorphismus $h : \varinjlim_a G_a \rightarrow H$ mit $h_a = h \circ i_a$ für alle $a \in A$.

13.4.4. Garbencohomologie

Definition 114 (Garbencohomologie): Sei \mathcal{F} eine Garbe abelscher Gruppen auf dem topologischen Raum X . Dann definiere die n -te **Garben-Cohomologiegruppe** als

$$H^n(X; \mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{U}} H^n(\mathcal{U}; \mathcal{F}),$$

wobei $\{H^n(\mathcal{U}; \mathcal{F})\}_{\mathcal{U}}$ offene Überdeckung ist ein gerichtetes System ist, da $r_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}} = \text{Id}$ und $r_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} \circ f_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = r_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}}$ für $\mathcal{U} \leq \mathcal{V} \leq \mathcal{W}$ gilt.

Satz 115: Sei \mathcal{F} eine Garbe abelscher Gruppen auf X . Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\cong} H^0(X; \mathcal{F})$.

14. Vektorbündel- und Prägarben-Cohomologie

Für das weitere Vorgehen führen wir einen neuen Begriff ein, das holomorphe Vektorbündel.

14.1. Holomorphe Vektorbündel

Ähnlich wie bei den reellen Vektorbündeln wird an jeden Punkt eines Basisraums ein komplexer Vektorraum angeheftet, die genaue Definition ist wie folgt.

Definition 116 (Holomorphes Vektorbündel): Ein holomorphes Vektorbündel vom Rang r besteht aus den folgenden Elementen:

1. Eine holomorphe Abbildung $\pi : E \rightarrow X$ zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten, wobei E der **Totalraum** und X der **Basisraum** des Bündels ist.
2. Für jedes $p \in X$ haben wir die Struktur eines r -dimensionalen komplexen Vektorraums auf $E_p := \pi^{-1}(p)$.

Außerdem muss das **Axiom der lokalen Trivialität** erfüllt sein: Für jedes $p \in X$ existiert eine Umgebung $U \subset X$ um p und eine biholomorphe Abbildung $h : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^r$, sodass für jedes $q \in U$ die Einschränkung $h_q := h|_{E_q}$ ein komplex-linearer Isomorphismus $E_q \xrightarrow{\cong} \{q\} \times \mathbb{C}^r$ ist. Falls $r = 1$ ist, so heißt E **Geradenbündel**.

Bis auf den Unterschied „komplex“-linear sind Abbildungen zwischen holomorphen Vektorbündeln genau wie Abbildungen zwischen reellen Vektorbündeln definiert.

Definition 117 (Vektorbündel-Homomorphismus): Ein **Homomorphismus zwischen holomorphen Vektorbündeln** $E \rightarrow X$ und $F \rightarrow X$ ist eine holomorphe Abbildung $f : E \rightarrow F$, die jeder Faser E_p komplex-linear auf die entsprechende Faser F_p abbildet.

f heißt **Isomorphismus**, falls $f_p := f|_{E_p} : E_p \xrightarrow{\cong} F_p$ für jedes $p \in X$ ein Isomorphismus ist.

Zwei besondere Formen holomorpher Vektorbündel nehmen (genau wie bei reellen Vektorbündeln) eine wichtige Stellung ein.

Definition 118 (Produktbündel): Ein holomorphes Vektorbündel $E := X \times \mathbb{C}^r \rightarrow X$ heißt **Produktbündel**.

Definition 119 (Triviales Bündel): Das Bündel $E \rightarrow X$ heißt **trivial**, wenn es zu einem Produktbündel isomorph ist.

Satz 120: Falls $f : E \rightarrow F$ ein Isomorphismus zwischen holomorphen Vektorbündeln ist, so ist die Umkehrabbildung immer holomorph.

Beispiel: 1. Sei X eine n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Dann ist das **holomorphe Tangentialbündel** völlig analog zum reellen Fall durch

$$TX = \bigcup_{p \in X} \{p\} \times T_p X = \coprod_{p \in X} T_p X$$

definiert. Diese Menge hat genau eine Struktur als $2n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, sodass die Bündelprojektion $\pi : TX \rightarrow X$ stetig und für jede lokale Parametrisierung $U' \subset \mathbb{C}^n \xrightarrow{\varphi} U \subset X$ die Abbildung

$$U' \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{T\varphi} \pi^{-1}(U) \quad (p, z) \mapsto (p, T\varphi_p(z))$$

biholomorph ist. Zusammen mit der natürlichen Projektion $\pi : TX \rightarrow X$ erhalten wir somit ein holomorphes Vektorbündel vom Rang n über X .

2. Betrachte $\lambda := \{([z], w) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} : \text{es existiert ein } a \in \mathbb{C} \text{ mit } w = az\}$. Für alle Punkte $z = (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist

$$\pi : \lambda \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n \quad ([z], w) \mapsto [z]$$

die natürliche Projektion, und $\pi^{-1}([z]) = \mathbb{C}z$ ein eindimensionaler komplex-linearer Unterraum von \mathbb{C}^{n+1} . Dann ist $\lambda \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ eine $(n+1)$ -dimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit und $\pi : \lambda \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ ist ein holomorphes Geradenbündel.

14.2. Die Čech-Cohomologie von Geradenbündel

Sei $L \xrightarrow{\pi} X$ ein holomorphes Geraden- bzw. Linienbündel, $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ ein Atlas lokaler Trivialisierungen, d.h. $\mathfrak{U} := \{U_\alpha\}$ ist eine offene Überdeckung von X und $h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times \mathbb{C}$ für jedes $\alpha \in I$ ein Isomorphismus von Vektorbündeln über U_α .

Für $(p, z) \in U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}$ mit der Abkürzung $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$ geschieht der Trivialisierungswechsel durch

$$h_\alpha \circ h_\beta^{-1}(p, z) = (p, g_{\alpha\beta}(p)z),$$

wobei $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{C}^*$ holomorph ist, also liegt $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta})$ und $g \in C^1(\mathfrak{U}; \mathcal{O}^*)$. Offenbar gelten $g_{\alpha\alpha} = 1$ und $g_{\beta\alpha} = g_{\alpha\beta}^{-1}$. Auf $U_{\alpha\beta\gamma} \times \mathbb{C}$ gilt zudem wegen

$$\text{Id} = h_\alpha h_\beta^{-1} \circ h_\beta h_\gamma^{-1} \circ h_\gamma h_\alpha^{-1}$$

die Gleichheit $1 = g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = g_{\beta\gamma} g_{\alpha\gamma}^{-1} g_{\alpha\beta} = dg \in C^2(\mathfrak{U}; \mathcal{O}^*)$, und diese liefert uns dann, dass $g \in Z^1(\mathfrak{U}; \mathcal{O}^*)$ liegt.

14.2.1. Konstruktion der Geradenbündel-Čech-Cohomologieklassen

Wir definieren nun die vorläufigen Čech-Cohomologieklassen eines Linien- bzw. Geradenbündels durch $[L; \mathfrak{U}, h] := [g] \in H^1(\mathfrak{U}; \mathcal{O}^*)$.

Lemma 121: Das Bild der Cohomologieklass $[L; \mathfrak{U}, h]$ in $H^1(X; \mathcal{O}^*)$ ist unabhängig von \mathfrak{U} und h , und hängt somit nur vom Isomorphismen-Typ von L ab.

Also definiert ein holomorphes Geradenbündel $L \rightarrow X$ eine Cohomologieklass $[L] \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$, da wir soeben die Invarianz der Cohomologieklass von der Überdeckung \mathfrak{U} und den Trivialisierungen h (also dem Atlas) gezeigt haben.

14.2.2. Isomorphismen-Klassifikation holomorpher Geradenbündel

Mit dem neu gewonnenen cohomologischen Zugang zu holomorphen Geradenbündel können wir diese nun näher klassifizieren.

Satz 122: *Es gibt eine Bijektion von der Menge der Isomorphismenklassen holomorpher Geradenbündel über X in die Menge der Cohomologieklassen $H^1(X; \mathcal{O}^*)$, die definiert ist durch*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Isomorphismenklassen holomor-} \\ \text{pher Geradenbündel über } X \end{array} \right\} \longrightarrow H^1(X; \mathcal{O}^*) \quad L \mapsto [L]$$

Sei $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} und X eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann ist ein \mathbb{R} -Geradenbündel über X (also ein reelles Geradenbündel über X) ein reelles Vektorbündel über X vom Rang 1. Analog ist ein \mathbb{C} -Geradenbündel über X ein komplexes Geradenbündel über X , also ein komplexes bzw. holomorphes Vektorbündel über X vom Rang 1. Für $U \subset X$ offen, sei $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}^*$ die Garbe, die durch

$$U \mapsto \{ \text{glatte Abbildungen } U \longrightarrow \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\} \}$$

gegeben ist. Der vorige Satz überträgt sich dann analog:

Satz 123: *Es gibt eine bijektive Abbildung*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Isomorphieklassen glatter} \\ \mathbb{K}\text{-Geradenbündel über } X \end{array} \right\} \longrightarrow H^1(X; \mathcal{E}_{\mathbb{K}}^*) \quad L \mapsto [L]$$

und analog für topologische \mathbb{K} -Geradenbündel über einem topologischen Raum X .

Bemerkung: *Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit, dann ist $H^1(\mathfrak{U}; \mathcal{O}^*) \hookrightarrow H^1(X; \mathcal{O}^*)$ injektiv, denn aus $[L; \mathfrak{U}] \mapsto [L] = 1$ folgt $[L; \mathfrak{U}] = 1$. Ähnliches gilt für die Garben $\varepsilon_{\mathbb{R}}^*$, $\varepsilon_{\mathbb{C}}^*$, $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^*$ und $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^*$, wobei die letzteren beiden die Garben der stetigen Funktionen nach \mathbb{R}^* bzw. \mathbb{C}^* sind.*

14.3. Gleichheit der Čech- und Garben-Cohomologie-Gruppen

Als nächstes zeigen wir nun, dass die erste beiden Cohomologiegruppen der Überdeckungsabhängigen Čech-Cohomologie $H^1(\mathfrak{U}; \mathcal{F})$ isomorph zu ersten Garben-Cohomologiegruppe $H^1(X; \mathcal{F})$ ist. Mit anderen Worten ist also in der ersten Cohomologiegruppe die Wahl einer Überdeckung für die Cohomologie völlig unwichtig, was wir später ausnutzen werden.

Definition 124 (Konstante Garbe): Sei G eine abelsche Gruppe und X ein topologischer Raum. Wir definieren eine Garbe \mathcal{F} auf X durch

$$\mathcal{F}(U) = \{ \text{lokal konstante Abbildungen } U \longrightarrow G \},$$

der Étale-Raum ist dann einfach $\tilde{\mathcal{F}} = X \times G$, also ist jeder Halm $\mathcal{F}_p = G$ für alle p . Oftmals wird diese spezielle **konstante Garbe** \mathcal{F} kurz mit G bezeichnet.

Satz 125: *Sei \mathcal{F} eine Garbe abelscher Gruppen auf dem topologischen Raum X und \mathfrak{U} eine offene Überdeckung von X . Dann ist die Abbildung $i_{\mathfrak{U}} : H^1(\mathfrak{U}; \mathcal{F}) \hookrightarrow H^1(X; \mathcal{F})$ injektiv.*

Es bleibt nun die Frage, wann die Abbildung $i_{\mathfrak{U}} : H^1(\mathfrak{U}; \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X; \mathcal{F})$ auch surjektiv (und somit ein Isomorphismus) ist.

Betrachten wir den Fall, dass X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $\mathcal{F} := \mathcal{O}^*$ die Garbe der holomorphen Funktionen ohne Nullstellen ist. $i_{\mathfrak{U}}$ ist genau dann surjektiv, wenn für jedes

holomorphe Geradenbündel $L \rightarrow X$ gilt, dass die Einschränkungen $L|_{U_\alpha}$ für alle α trivial sind (und sich somit in $H^1(\mathfrak{U}; \mathcal{F})$ befinden). Hinreichend ist sicherlich, dass $H^1(U_\alpha; \mathcal{O}^*) = 1$ für alle α gilt.¹

Satz 126 (Leray): Sei \mathcal{F} eine Garbe abelscher Gruppen auf dem topologischen Raum X und $\mathfrak{U} := \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X mit $H^1(U_i; \mathcal{F}) = 0$ für alle $i \in I$.² Dann ist

$$i_{\mathfrak{U}} : H^1(\mathfrak{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} H^1(X; \mathcal{F})$$

ein Isomorphismus.

14.4. Abstrakte Cohomologietheorie

14.4.1. Allgemeine Cohomologie und induktiver Limes

Definition 127 (Graduierte Gruppe): Eine graduierte (abelsche) Gruppe ist eine Familie $C := \{C^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ abelscher Gruppen.

Ein Homomorphismus $f : C \rightarrow \tilde{C}$ vom Grad k zwischen graduierten Gruppen besteht aus einem Homomorphismus $f^n : C^n \rightarrow \tilde{C}^{n+k}$ für jedes n .

Definition 128 (Cokettenkomplex): Ein Cokettenkomplex ist ein Paar (C, d) , wobei C eine graduierte Gruppe und $d : C \rightarrow C$ ein Homomorphismus vom Grad 1 ist, sodass $d \circ d = 0$. Die zugehörigen Cohomologiegruppen sind durch

$$H^n(C) := \frac{\ker d_n : C^n \rightarrow C^{n+1}}{\operatorname{im} d_{n-1} : C^{n-1} \rightarrow C^n}$$

definiert.

Definition 129 (Cokettenabbildung): Eine Cokettenabbildung zwischen den Kettenkomplexen C und \tilde{C} ist ein Homomorphismus $f : C \rightarrow \tilde{C}$ vom Grad 0 mit $f_{n+1}d_n = d_n f_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, kurz $fd = df$ geschrieben. Eine Cokettenabbildung f induziert eine Cohomologiegruppen-Abbildung $f_* : H^n(C) \rightarrow H^n(\tilde{C})$ für alle n .

Sei $\{C_a\}_{a \in A}$ ein gerichtetes System von Cokettenkomplexen C_a und Cokettenabbildungen $f_a^b : C_a \rightarrow C_b$. Dann ist $\{H^*(C_a)\}_{a \in A}$ ein gerichtetes System von graduierten Gruppen und Homomorphismen $(f_a^b)_* : H^*(C_a) \rightarrow H^*(C_b)$ vom Grad 0. Dann kommutiert

$$\begin{array}{ccc} C_a^n & \xrightarrow{d} & C_a^{n+1} \\ f_a^b \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow f_a^b \\ C_b^n & \xrightarrow{d} & C_b^{n+1} \end{array}$$

Sei $C_\infty := \varinjlim_a C_a^n$ der induktive Limes des Cokettenkomplex-Systems. Wir erhalten

$$d_\infty : C_\infty \rightarrow C_\infty$$

¹Da die Garbe \mathcal{O}^* multiplikativ verstanden wird, ist 1 statt der sonst üblichen Null das neutrale Element.

²Man beachte, dass hier $H^1(U_i; \mathcal{F})$ die Cohomologiegruppe des Raums U_i meint, und nicht die Überdeckung \mathfrak{U} .

vom Grad 1, sodass für die Inklusionsabbildung $i_a : C_a \hookrightarrow C_\infty$ dann $d_\infty i_a = i_a d$ und $d_\infty \circ d_\infty = 0$ gilt. Für $(i_a)_* : H^*(C_a) \rightarrow H^*(C_\infty)$ und analog für $(i_b)_* : H^*(C_b) \rightarrow H^*(C_\infty)$ gilt der Zusammenhang

$$(i_b)_* \circ (f_a^b)_* = (i_b \circ f_a^b)_* = (i_a)_* .$$

Die lässt sich grafisch wie folgt veranschaulichen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^*(C_a) & \xrightarrow{(f_a^b)_*} & H^*(C_b) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \varinjlim_a H^*(C_a) \\
 & \searrow (i_a)_* & & \swarrow (i_b)_* & & & \\
 & & H^*(C_\infty) & & & &
 \end{array}$$

\circlearrowleft
 h aus der universellen Eigenschaft des ind. Limes

Satz 130: Die Abbildung $h : \varinjlim_a H^*(C_a) \xrightarrow{\cong} H^*(\varinjlim_a C_a) = H^*(C_\infty)$ ist ein Isomorphismus.

Ein wichtiger Spezialfall ist $H^*(C_a) = 0$ für alle a , dann ist $H^*(C_\infty) = 0$, d.h. der induktive Limes exakter Sequenzen ist wieder exakt.

14.4.2. Exakte Cohomologiesequenzen

Sei $0 \rightarrow \bar{C} \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} \bar{C} \rightarrow 0$ eine **kurze exakte Sequenz von Cokettenabbildungen**, d.h. jede einzelne Sequenz

$$0 \rightarrow \bar{C}^n \xrightarrow{f_n} C^n \xrightarrow{g_n} \bar{C}^n \rightarrow 0$$

ist für alle n exakt. Für jedes n definieren wir einen Homomorphismus $\delta : H^n(\bar{C}) \rightarrow H^{n+1}(\bar{C})$ wie folgt:

$$\begin{array}{ccccc}
 C^n & \xrightarrow{y \mapsto g(y)=z} & \bar{C}^n & \longrightarrow & 0 \\
 & \searrow g_n & & \swarrow z \mapsto dz=0 & \\
 & & & & \\
 0 & \longrightarrow & \bar{C}^{n+1} & \xrightarrow{x \mapsto dy} & C^{n+1} \xrightarrow{g_{n+1}} \bar{C}^{n+1}
 \end{array}$$

Falls $z \in \bar{C}^n$ mit $dz = 0$ ist, wähle ein $y \in C^n$ mit $g(y) = z$. Dann gilt $g(dy) = dg(y) = dz = 0$, also ist $dy = f(x)$ für (genau) ein $x \in \bar{C}^n$.

Satz 131: $[x] \in H^{n+1}(\bar{C})$ ist unabhängig von der Wahl von y und hängt nur von der Cohomologiekategorie von z ab.

Den Homomorphismus $\delta : H^n(\bar{C}) \rightarrow H^{n+1}(\bar{C})$ definieren wird nun durch $\delta[z] = [x]$, was nach dem vorigen Satz dann wohldefiniert ist.

Satz 132: Die lange exakte Sequenz von Cohomologiegruppen

$$\dots \xrightarrow{\delta} H^n(\bar{C}) \xrightarrow{f_*} H^n(C) \xrightarrow{g_*} H^n(\bar{C}) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(\bar{C}) \longrightarrow \dots$$

ist exakt.

Satz 133: *Das kommutative Diagramm von Cokettenkomplexen und -Abbildungen*

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \bar{A} & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \bar{\bar{A}} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \bar{B} & \longrightarrow & B & \longrightarrow & \bar{\bar{B}} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

habe exakte Zeilen. Dann kommutiert für alle $n \in \mathbb{Z}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 H^n(\bar{A}) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(\bar{A}) \\
 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\
 H^n(\bar{\bar{B}}) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(\bar{\bar{B}})
 \end{array}$$

14.5. Prägarben-Cohomologie

Sei \mathcal{F} eine Prägarbe abelscher Gruppen auf dem topologischen Raum X . Wir definieren die Cokettenkomplexe $C^n(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, die Čech-Cohomologie-Gruppen $H^n(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ sowie die Prägarben-Cohomologiegruppen $H^n(X; \mathcal{F})$ genau wie für Garben.

Sei $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Homomorphismus zwischen Prägarben abelscher Gruppen auf X . Dann induziert f einen Homomorphismus

$$f_* : H^n(X; \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X; \mathcal{G})$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Für die Prägarben-Coketten-Abbildung $f_{\#}$ gilt

$$\begin{array}{c}
 C^n(\mathcal{U}; \mathcal{F}) = \prod_{(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in I^{n+1}} \mathcal{F}(U_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}) \\
 \downarrow f_{\#} \\
 C^n(\mathcal{U}; \mathcal{G}) = \prod_{(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in I^{n+1}} \mathcal{G}(U_{\alpha_0, \dots, \alpha_n})
 \end{array}$$

bzw. explizit $(f_{\#}c)(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = f_{U_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}}(c(\alpha_0, \dots, \alpha_n))$. Um zu zeigen, dass $f_{\#}$ eine Cokettenabbildung gemäß Definition 129 ist, betrachte das folgende Lemma.

Lemma 134: $f_{\#}$ vertauscht mit d , d.h. $df_{\#} = f_{\#}d$.

Also induziert $f_{\#}$ einen Homomorphismus $f_{\mathcal{U}} : H^n(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow H^n(\mathcal{U}; \mathcal{G})$. Sei nun eine zweite, feinere Überdeckung $\mathfrak{V} := \{V_{\beta}\}_{\beta \in J} \geq \mathcal{U} := \{U_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ mit der zugehörigen Verfeinerungsabbildung $\varphi : J \rightarrow I$ gegeben.

Lemma 135: *Es gilt $\varphi^* f_{\#} = f_{\#} \varphi^*$, d.h. das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc}
 C^n(\mathcal{U}; \mathcal{F}) & \xrightarrow{f_{\#}} & C^n(\mathcal{U}; \mathcal{G}) \\
 \varphi^* \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \varphi^* \\
 C^n(\mathfrak{V}; \mathcal{F}) & \xrightarrow{f_{\#}} & C^n(\mathfrak{V}; \mathcal{G})
 \end{array}$$

Korollar 136: *Das folgende Diagramm kommutiert ebenfalls*

$$\begin{array}{ccc} H^n(\mathfrak{U}; \mathcal{F}) & \xrightarrow{f_{\mathfrak{U}}} & H^n(\mathfrak{U}; \mathcal{G}) \\ r_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow r_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} \\ H^n(\mathfrak{V}; \mathcal{F}) & \xrightarrow{f_{\mathfrak{V}}} & H^n(\mathfrak{V}; \mathcal{G}) \end{array}$$

also induziert f einen Homomorphismus $f_* : H^n(X; \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X; \mathcal{G})$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Damit haben wir die Wohldefiniertheit der Prägarben-Cohomologie gezeigt. Bisher scheint die gesamte Konstruktion noch keine Unterschiede zur Garben-Cohomologie aufzuweisen. Dies ist aber nicht mehr der Fall, wenn wir die Exaktheit von Prägarben und Garben betrachten.

Definition 137 (Prägarben-Exaktheit): Eine Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \rightarrow 0$ von Prägarbenhomomorphismen heißt **exakt**, falls für alle offenen $U \subset X$ die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{H}(U) \rightarrow 0$$

exakt ist.

Man vergleiche dies auch mit der Exaktheit von Garbensequenzen, die wir auf Seite 100 in Definition 95 und dem nachfolgenden Satz untersucht haben. Man beachte insbesondere die hinzukommende Null am Ende der kurzen exakten Sequenz.

Satz 138: *Sei $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von Prägarben abelscher Gruppen. Dann gelten folgende Aussagen:*

1. *Die induzierte Sequenz $0 \rightarrow \bar{\mathcal{F}} \rightarrow \bar{\mathcal{G}} \rightarrow \bar{\mathcal{H}} \rightarrow 0$ ist exakt.*
2. *Es gibt eine lange exakte Sequenz von Prägarben-Cohomologiegruppen*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X; \mathcal{F}) & \xrightarrow{f_*} & H^0(X; \mathcal{G}) & \xrightarrow{g_*} & H^0(X; \mathcal{H}) \\ & & & & \delta & \searrow & \\ & & H^1(X; \mathcal{F}) & \xrightarrow{f_*} & H^1(X; \mathcal{G}) & \xrightarrow{g_*} & H^1(X; \mathcal{H}) \\ & & & & \delta & \searrow & \\ & & H^2(X; \mathcal{F}) & \longrightarrow & \dots & & \end{array}$$

Bemerkung: Falls $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Garben (keine Prägarben!) ist, so ist nach Satz 96

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U)$$

für alle offenen Teilmengen $U \subset X$ exakt, aber $\mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U)$ ist nicht notwendig surjektiv, sodass man nicht einfach eine Null anhängen kann. Deshalb ist die Sequenz auch nicht unbedingt exakt.³ **Prägarben-Exaktheit ist also stärker als Garben-Exaktheit.**

³Genau aus diesem Grund sind wir bei der Betrachtung des Beispiels aus Abschnitt 13.3.3 von Seite 101 auf die Notwendigkeit der Garben-Cohomologie gestoßen.

Definition 139 (Lokal endlich): Eine Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eines topologischen Raums X heißt **lokal endlich**, falls jeder Punkt in X eine Umgebung besitzt, die nur endlich viele der Mengen U_α schneidet.

Definition 140 (Parakompakt): Ein topologischer Raum X heißt **parakompakt**, falls X hausdorffsch ist und jede offene Überdeckung von X eine lokal endliche, offene Verfeinerung besitzt.

Satz 141: *Jede topologische Mannigfaltigkeit ist parakompakt.*

Lemma 142: *Sei X parakompakt und \mathcal{F} eine Prägarbe abelscher Gruppen auf X mit $\bar{\mathcal{F}} = 0$, sodass alle Keime verschwinden. Dann verschwinden auch alle Cohomologie-Gruppen, d.h. $H^n(X; \mathcal{F}) = 0$ gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$.*

15. Anwendung der Cohomologietheorien

Wir haben bisher nun drei eng miteinander verwandte Cohomologie-Theorien. Zuerst wäre da die fundamentale Čech-Cohomologie der Überdeckungen, aus deren induktiven Limes wir die Garben-Cohomologie erhielten. Analog dazu haben wir im letzten Abschnitt die Prägarben-Cohomologie konstruiert, die stärkere Exaktheitseigenschaften aufweist.

15.1. Verbindung zwischen Garben- und Prägarben-Cohomologie

Wir haben also nun Cohomologie-Gruppen von Garben als auch von Prägarben. Es stellt sich nun die Frage, inwiefern eine Beziehung zwischen diesen beiden Cohomologiegruppen besteht. Dies liefert der folgende Satz.

Satz 143: Sei X parakompakt, \mathcal{F} eine Prägarbe abelscher Gruppen auf X und $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \bar{\mathcal{F}}$ der kanonische Homomorphismus mit $\theta_U(s) = \tilde{s} \in \Gamma(U, \bar{\mathcal{F}})$. Dann ist die induzierte Abbildung

$$\theta_* : H^n(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} H^n(X; \bar{\mathcal{F}})$$

ein Isomorphismus für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Satz 144: Sei X parakompakt und $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf X . Dann existiert eine exakte Cohomologiegruppen-Sequenz

$$\dots \rightarrow H^n(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{f_*} H^n(X; \mathcal{G}) \xrightarrow{g_*} H^n(X; \mathcal{H}) \rightarrow H^{n+1}(X; \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

15.2. Gleichheit von Cohomologietheorien

Nachdem wir nun die Verbindungen zwischen der Prägarben- und Garbencohomologie kennen, wollen wir eine weitere Verwandtschaft zur de Rham-Cohomologie aus der Analysis III beweisen. Entscheidende Hilfsmittel dafür (wie auch für die spätere Definition des Geschlechts einer Mannigfaltigkeit) sind die Eigenschaften „fein“ und „azyklisch“ einer Garbe, sowie eine Auflösung.

15.2.1. Feine Garben

Definition 145 (Feine Garbe): Eine Garbe \mathcal{F} abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X heißt **fein**, falls es für jede lokal endliche offene Überdeckung $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ von X eine Familie von Garbenhomomorphismen $\eta_\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ mit $\alpha \in I$ gibt, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Es ist $0 = (\eta_\alpha)_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x$ für alle x in einer offenen Umgebung von $X \setminus U_\alpha$.
2. Es gilt für die (nach 1.) endliche Summe $\sum_{\alpha \in I} (\eta_\alpha)_x = \text{Id}$ für alle $x \in X$.

Die Familie $\{\eta_\alpha\}_{\alpha \in I}$ heißt eine der Überdeckung \mathcal{U} untergeordnete Zerlegung der Eins von \mathcal{F} über X als Basisraum.

Beispiel: Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit und $E \rightarrow X$ ein glattes, reelles Vektorbündel. Betrachte

$$\mathcal{E}_{X,E}(U) := \Gamma(E|_U) = \{\text{glatte Schnitte von } E \text{ über } U\},$$

dann ist $\mathcal{E}_{X,E}$ eine Garbe reeller Vektorräume auf X . Behauptung: $\mathcal{E}_{X,E}$ ist fein.

Beweis: Falls $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine lokal endliche Überdeckung von X ist, so existiert eine dazu untergeordnete glatte Zerlegung der Eins¹ $\{g_\beta\}_{\beta \in J}$ von X mit $\text{supp}(g_\beta) \subset U_{\varphi(\beta)}$ und $\varphi : J \rightarrow I$. Dann ist

$$h_\alpha := \sum_{\beta \in \varphi^{-1}(\alpha)} g_\beta$$

eine lokal endliche Summe und es gilt $\sum_\alpha h_\alpha = \sum_\beta g_\beta = 1$. Es bleibt noch nachzuprüfen, ob die Eigenschaft des kompakten Trägers erfüllt ist. $\bigcup_{\beta \in \varphi^{-1}(\alpha)} \text{supp}(g_\beta)$ ist eine lokal endliche Vereinigung abgeschlossener Teilmengen von X und deshalb abgeschlossen. Außerdem gilt

$$\text{supp}(h_\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{x \in X : h_\alpha(x) \neq 0\}} \subseteq \bigcup_{\beta \in \varphi^{-1}(\alpha)} \text{supp}(g_\beta) \subset U_\alpha,$$

also ist $\text{supp}(h_\alpha)$ auch beschränkt und damit kompakt.

Nun definieren wir einen Garben-Homomorphismus $\eta_\alpha : \mathcal{E}_{X,E} \rightarrow \mathcal{E}_{X,E}$ wie folgt: Ist $s \in \Gamma(E|_U)$ ein Schnitt über U , dann sei $(\eta_\alpha)_U(s) := h_\alpha \cdot s$. Wir müssen die beiden Axiome der vorigen Definition nachprüfen:

1. Falls $x \in X \setminus U_\alpha$ liegt, so ist $h_\alpha = 0$ in einer Umgebung V von x . Folglich ist $(\eta_\alpha)_V = 0$, und damit $(\eta_\alpha)_x = 0$ für alle $x \in V$.
2. Falls $x \in X$ ist, so hat x eine Umgebung U mit $U \cap U_\alpha \neq \emptyset$ für nur endlich viele $\alpha \in I$. Ist $s \in \Gamma(E|_U)$, so gilt $(\eta_\alpha)_x(s_x) = (h_\alpha \cdot s)_x$ (dies ist der Keim, nicht der Wert, in x). Summieren wir alle diese Keime über α , so folgt

$$\sum_\alpha (\eta_\alpha)_x(s_x) = \sum_\alpha (h_\alpha \cdot s)_x = \left(\sum_\alpha h_\alpha s \right)_x = s_x,$$

also ist $\sum_\alpha (h_\alpha)_x = \text{Id}$.

Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{E}_{X,E}$ eine feine Garbe ist. \square

¹Eine glatte Zerlegung der Eins sowie ihre Existenz haben wir in der Analysis III explizit behandelt.

Definition (Glatte Zerlegung der Eins): Unter einer **glatten Zerlegung der Eins** auf einer glatten Mannigfaltigkeit M verstehen wir eine Familie $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von glatten Funktionen $h_\alpha : M \rightarrow [0, 1]$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Familie $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ist lokal endlich in dem Sinne, dass jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung $V \subset M$ besitzt, sodass $h_\alpha|_V = 0$ für alle bis auf endlich viele $\alpha \in A$ ist.
2. Es gilt $\sum_{\alpha \in A} h_\alpha(p) = 1$ für alle $p \in M$.

Eine Zerlegung der Eins $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A}$ auf M ist **einer offenen Überdeckung** $\mathfrak{U} := \{U_\beta\}_{\beta \in B}$ **untergeordnet**, falls für alle α ein β mit $\text{supp}(h_\alpha) \subset U_\beta$ existiert.

Satz: Zu jeder offenen Überdeckung $\mathfrak{U} := \{U_\beta\}_{\beta \in B}$ einer Mannigfaltigkeit M gibt es eine untergeordnete Zerlegung der Eins.

Die feinen Garben benutzen wir nun im folgenden Satz:

Satz 146: Sei \mathcal{F} eine feine Garbe auf einem topologischen Raum X , $\mathfrak{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine lokal endliche offene Überdeckung von X . Dann ist $H^p(\mathfrak{U}; \mathcal{F}) = 0$ für alle $p > 0$.

Korollar 147: Für jede feine Garbe \mathcal{F} auf einem parakompakten topologischen Raum X ist $H^p(X; \mathcal{F}) = 0$ für $p > 0$.

15.2.2. Azyklische Garben, Auflösungen und die de Rham-Cohomologie

Im Anschluß an das vorige Korollar definieren wir nun die Begriffe einer azyklischen Garbe und der Auflösung einer Garbe. Ganz nebenbei erhalten wir dabei die Verbindung zur de Rham-Cohomologie aus der Analysis III.

Definition 148 (Azyklische Garbe): Eine Garbe \mathcal{F} mit $H^p(X; \mathcal{F}) = 0$ für $p > 0$ heißt **azyklisch**.

Definition 149 (Auflösung): Die **Auflösung einer Garbe** \mathcal{F} abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X ist eine exakte Sequenz von Garben

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \underbrace{\mathcal{A}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{A}^2 \xrightarrow{d^2} \dots}_{\mathcal{A}^*}$$

Die Auflösung heißt **azyklisch**, falls jedes \mathcal{A}^j eine azyklische Garbe ist.

Bemerkung: Hat man eine azyklische Auflösung zu einer Garbe \mathcal{F} abelscher Gruppen auf X vorliegen, so erhält man durch

$$0 \xrightarrow{d_X^{-1}} \mathcal{A}^0(X) \xrightarrow{d_X^0} \mathcal{A}^1(X) \xrightarrow{d_X^1} \mathcal{A}^2(X) \xrightarrow{d_X^2} \dots$$

einen **Auflösungs-Cokettenkomplex** $\mathcal{A}^*(X)$.² Für $p \geq 0$ definieren wir die **Cohomologiegruppen einer azyklischen Auflösung** durch

$$H^p(\mathcal{A}^*(X)) = \frac{\ker(d_X^p : \mathcal{A}^p(X) \longrightarrow \mathcal{A}^{p+1}(X))}{\operatorname{im}(d_X^{p-1} : \mathcal{A}^{p-1}(X) \longrightarrow \mathcal{A}^p(X))}.$$

Satz 150: Sei $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{A}^*$ die azyklische Auflösung einer Garbe \mathcal{F} auf einem parakompakten Raum X . Dann existiert ein natürlicher Isomorphismus $H^p(\mathcal{A}^*(X)) \xrightarrow{\cong} H^p(X; \mathcal{F})$ für alle $p \geq 0$ zwischen der Auflösungs- und Garben-Cohomologie.

²Falls $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ ein Garbenhomomorphismus ist, so ist $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}}$ ein lokaler Homöomorphismus nach Satz 91 von Seite 99. Es ist $\mathcal{F}(U) = \{\text{Schnitte von } \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow X \text{ über } U\}$ mit

$$s \in \mathcal{F}(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{G}(U) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{\mathcal{G}} \\ & \searrow \tilde{s} & \nearrow \widetilde{f_U(s)} \\ & U & \end{array}$$

Für eine Sequenz $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$ folgt aus $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f} = 0$ allgemein $g \circ f = 0$.

Beispiel: Sei X eine glatte n -Mannigfaltigkeit und \mathcal{E}_X^p die **Garbe der Differentialformen auf X vom Grad $p \geq 0$** , sodass explizit für eine offene Teilmenge $U \subset X$

$$\mathcal{E}_X^p(U) = \{p\text{-Formen auf } U\} = \Gamma(U, \Lambda^p)$$

gilt (oftmals bezeichnet man zudem mit $\Omega^p(X)$ die **Menge der glatten p -Formen auf U**). Dabei ist $\Lambda^p \rightarrow X$ ein reelles Vektorbündel und jede Faser entspricht

$$\Lambda_x^p = \left\{ \text{alternierende } p\text{-Formen } \underbrace{T_x X \times \cdots \times T_x X}_{p \text{ Mal}} \rightarrow \mathbb{R} \right\}.$$

Somit ist \mathcal{E}_X^p eine feine Garbe.³ Wir behaupten nun, dass

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{E}_X^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_X^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_X^2 \xrightarrow{d} \dots$$

eine azyklische Auflösung der konstanten Garbe \mathbb{R} auf X ist, wobei d diesmal die äußere Ableitung⁴ ist.

Beweis: Zunächst impliziert „fein“ auch „azyklisch“ nach Korollar 147 wenn der Raum parakompakt ist (jede Mannigfaltigkeit ist nach Satz 141 von Seite 113 parakompakt). Um die Exaktheit der Auflösungs-Sequenz zu beweisen sei $x \in X$. Jedes Element des Halms $(\mathcal{E}_X^p)_x$ hat die Form ω_x , wobei $\omega \in \mathcal{E}_X^p(U)$ liegt, $U \approx \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung um x und $d\omega = 0$ sei.

Für $p = 0$ ist $\omega : U \rightarrow \mathbb{R}$ konstant, damit folgt bereits die Exaktheit bei \mathcal{E}_X^0 . Für $p > 0$ folgt aus dem Poincaré-Lemma die Existenz eines $\varphi \in \mathcal{E}_X^{p-1}(U)$ mit $d\varphi = \omega$, womit man die Exaktheit bei \mathcal{E}_X^p erhält.

Definition 151 (de Rham-Cohomologie): Mit den vorigen Ausführungen kann die **de Rham-Cohomologie** kurz durch $H_{\text{dR}}^p(X) := H^p(\mathcal{E}_X^*)$ definiert werden.

Satz 152: Für jede glatte Mannigfaltigkeit X ist $H^p(X; \mathbb{R}) \cong H_{\text{dR}}^p(X)$. Insbesondere gilt also $H^p(X; \mathbb{R}) = 0$ für $p > \dim X$.

Das nächste Ziel soll nun sein, eine azyklische Auflösung der Garbe \mathcal{O} der holomorphen Funktionen auf einer Riemannsche Fläche zu finden.

15.3. Die Garbe \mathcal{O} einer Riemannschen Fläche

Zunächst benötigen wir nun noch **komplexwertige Differentialformen**. Auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ haben diese die folgende Form:

$$\begin{aligned} 0\text{-Formen:} & \quad f \\ 1\text{-Formen:} & \quad f dx + g dy \\ 2\text{-Formen:} & \quad f dx \wedge dy \end{aligned}$$

³Garben von Schnitten reeller Vektorbündel sind immer fein, dies haben wir im Beispiel auf Seite 15.2.1 gezeigt.

⁴Die **äußere Ableitung** wurde in der Analysis III als eindeutiger Operator zu einer Reihe von Forderungen definiert:

Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ eine offene Teilmenge. Dann gibt es genau einen Operator $d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$, der die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. Für Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist $df = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.
2. Der Operator ist linear, d.h. es gilt $d(\omega_1 + \omega_2) = d(\omega_1) + d(\omega_2)$.
3. Es gilt $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta$ für ein $\omega \in \Omega^p(M)$.
4. $d \circ d = 0$, d.h. induzierte Sequenzen sind exakt.

wobei $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ glatte (d.h. reell C^∞ -differenzierbare) Funktionen sind. Dabei gilt

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) (dx + i dy) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) (dx - i dy) \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \end{aligned}$$

15.3.1. Das Dolbeaultsche Lemma

Als nächstes zeigen wir das Dolbeaultsche Lemma, für das wir die folgenden zwei Hilfssätze benötigen.

Lemma 153: *Zu jeder glatten Funktion $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger existiert eine glatte Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$.*

Von nun an bezeichne $\mathcal{E}^p(X)$ die Menge der komplexwertigen p -Formen auf einer glatten Mannigfaltigkeit X , und $\mathcal{E}(X)$ die Menge aller glatten Funktionen $X \rightarrow \mathbb{C}$.

Lemma 154: *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $K \subset U$ kompakt und $g \in \mathcal{E}(U)$ eine glatte, komplexwertige Funktion. Dann existiert eine Funktion $f \in \mathcal{E}(U)$ mit $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$ auf K .*

Satz 155 (Dolbeault-Lemma): *Sei $D_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ für $0 < R \leq \infty$ eine offene R -Kreisscheibe und $g \in \mathcal{E}(D_R)$ eine glatte Funktion darauf. Dann existiert eine Funktion $f \in \mathcal{E}(D_R)$ mit $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$.*

15.3.2. Auflösung von \mathcal{O} und das Geschlecht einer Mannigfaltigkeit

Mit dem Dolbeault-Lemma können wir nun die Garbe der holomorphen Funktionen auflösen und so den bereits angesprochenen Begriff des Geschlechts einer Mannigfaltigkeit präzise definieren.

Satz 156 (Auflösung holomorpher Funktionen): *Seien \mathcal{O} und \mathcal{E} die Garben der holomorphen bzw. glatten komplexen Funktionen auf der offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$. Dann ist die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \mathcal{E} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

eine azyklische Auflösung der Garbe \mathcal{O} . Deswegen gelten folgende Aussagen:

1. $H^p(U; \mathcal{O}) = 0$ für $p > 1$,
2. $H^1(D_R, \mathcal{O}) = 0$ für $0 < R \leq \infty$.

Mit dieser Auflösung einer Garbe der holomorphen Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit können wir nun das bereits in Abschnitt 12.6 auf Seite 93 erwähnte Geschlecht einer Mannigfaltigkeit vernünftig definieren.

Definition 157 (Geschlecht): Das **Geschlecht einer kompakten Riemannschen Fläche** X ist durch

$$g := \dim_{\mathbb{C}} H^1(X; \mathcal{O})$$

als komplexe Dimension der ersten Cohomologiegruppe definiert.

Bemerkung: Die Wohldefiniertheit des Geschlecht, also das $H^1(X; \mathcal{O})$ endlichdimensional ist, werden wir noch zeigen.

Satz 158: *Die Riemannsche Sphäre bzw. komplexe projektive Ebene $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ hat das Geschlecht 0.*

15.4. Differentialformen auf komplexen Mannigfaltigkeiten

Wir werden nun komplexe Differentialformen einführen, die rein äußerlich große Ähnlichkeit zu den (reellen) Differentialformen aus der Analysis III aufweisen. Die Unterschiede sind eher im Detail zu finden. Mit ihrer Hilfe werden wir eine weitere Cohomologie-Theorie konstruieren, die Dolbeault-Cohomologie bzw. die Čech-de Rham-Cohomologie.

15.4.1. Komplex-lineare und anti-lineare Differentialformen

Definition 159 (Anti-linear): Seien V und W komplexe Vektorräume. Eine reell-lineare Abbildung $A : V \rightarrow W$ heißt **anti-linear**, falls $A(zv) = \bar{z}Av$ für $z \in \mathbb{C}$ und $v \in V$ gilt, d.h. es gilt $A(iv) = -iAv$ für $v \in V$.

Sei zu V und W die Abbildung $J : V \rightarrow V$ definiert, die der Multiplikation mit i in jeder Komponente entspricht. Definiere die Abbildung $\iota : \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$, dann ist $\iota(A) = JAJ^{-1}$ reell-linear und $\iota^2(A) = J^2A^2J^{-2} = (-1)A(-1) = A$. Es sei E_{\pm} der (± 1) -Eigenraum von ι , dann ist

$$E_+ = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \quad \text{und} \quad E_- = \{\text{anti-lineare } A : V \rightarrow W\} .$$

Es gilt die Zerlegung $A = \frac{1}{2}(1 + \iota)A + \frac{1}{2}(1 - \iota)A \in E_+ + E_-$, also $E_+ \cap E_- = 0$, und deshalb folgt $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) = E_+ \oplus E_-$.

Sei nun X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Dann definieren wir die Differentialformenmengen

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{1,0}(X) &:= \{\omega \in \mathcal{E}^1(X) : \text{Abb. } \omega(x) : T_x X \rightarrow \mathbb{C} \text{ komplex-linear für alle } x \in X\} \\ \mathcal{E}^{0,1}(X) &:= \{\omega \in \mathcal{E}^1(X) : \text{Abb. } \omega(x) : T_x X \rightarrow \mathbb{C} \text{ anti-linear für alle } x \in X\} \end{aligned}$$

Nach den vorigen Ausführungen können wir damit $\mathcal{E}^1(X) = \mathcal{E}^{1,0}(X) \oplus \mathcal{E}^{0,1}(X)$ zerlegen. Für $p, q \geq 0$ sei dann

$$\mathcal{E}^{p,q}(X) := \left\{ \begin{array}{l} \text{endliche Summen von } (p+q)\text{-Formen auf } X \text{ der Gestalt} \\ \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_q, \text{ wobei } \alpha_j \in \mathcal{E}^{1,0}(X) \text{ und} \\ \beta_j \in \mathcal{E}^{0,1}(X) \text{ für alle } j \text{ ist.} \end{array} \right\}$$

Falls X und Y zwei komplexe Mannigfaltigkeiten und $f : X \rightarrow Y$ holomorph sind, so ist die Tangentialabbildung $Tf_x : T_x X \rightarrow T_x Y$ komplex-linear für alle $x \in X$. Dann können wir ein Pullback $f^* \mathcal{E}^{p,q}(Y) \subset \mathcal{E}^{p,q}(X)$ durchführen.

Betrachten wir nun zuerst komplexe Differentialformen auf \mathbb{C}^n . Seien z_1, \dots, z_n Koordinaten auf \mathbb{C}^n . Falls $I := (i_1, \dots, i_p)$ für $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ eine Indexmenge ist, und $|I| = p$ die Anzahl der enthaltenen Differentiale angibt, so sei

$$dz_I := dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} .$$

Wegen $z_j = x_j + iy_j$ entspricht jedes einzelne Differential $dz_j = dx_j + idy_j$, und analog für $\bar{z}_j = x_j - idy_j$ dem Differential $d\bar{z}_j = dx_j - idy_j$. Bezüglich eine Indexmenge I definieren wir notationshalber noch

$$d\bar{z}_I := d\bar{z}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{i_p} ,$$

$dx_I := dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ und analog dy_I . Durch Addition bzw. Subtraktion von dz_j und $d\bar{z}_j$ können wir direkt dx_j und dy_j durch

$$dx_j = \frac{1}{2}(dz_j + d\bar{z}_j) \quad \text{und} \quad dy_j = \frac{1}{2i}(dz_j - d\bar{z}_j)$$

ausdrücken. In der Zerlegung $\mathcal{E}^1(X) = \mathcal{E}^{1,0}(X) \oplus \mathcal{E}^{0,1}(X)$ ist dann $dz_j \in \mathcal{E}^{1,0}(X)$ komplex-linear und $d\bar{z}_j \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$ anti-linear.

Eine r -Form auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}^n$ hat die Form

$$\sum_{|I|+|J|=r} a_{I,J} dx_I \wedge dy_J$$

wo $a_{I,J} : U \rightarrow \mathbb{C}$ glatt ist, da $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ Koordinaten auf $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ sind. Somit folgt

$$\mathcal{E}^r(U) = \sum_{p+q=r} \mathcal{E}^{p,q}(U), \quad (15.1)$$

d.h. jede r -Form auf U hat die Form

$$\sum_{|I|+|J|=r} b_{I,J} \underbrace{dz_I \wedge d\bar{z}_J}_{\in \mathcal{E}^{|I|,|J|}}.$$

Für jedes $z \in \mathbb{C}^n$ erzeugen $B_1 := \{(dx_I \wedge dy_J)(z)\}_{|I|+|J|=r}$ und $B_2 := \{(dz_I \wedge d\bar{z}_j)\}_{|I|+|J|=r}$ denselben Unterraum von

$$\Lambda^r(\mathbb{C}^n)^* := \Lambda^r(\mathbb{R}^{2n})^* = \left\{ \text{alle } \mathbb{R}\text{-multilineare alternierenden } \underbrace{\mathbb{C}^n \times \dots \times \mathbb{C}^n}_{r\text{-Mal}} \rightarrow \mathbb{C} \right\}$$

Weil B_1 eine Basis ist, muss auch B_2 eine Basis sein. Folglich ist die Summe (15.1) direkt.

Korollar 160: Für jede komplexe Mannigfaltigkeit X gilt $\mathcal{E}^r(X) = \bigoplus_{p+q=r} \mathcal{E}^{p,q}(X)$.

Sei nun $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ reell differenzierbar. Dann ist das Differential durch die Gleichung

$$df \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \right) = \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j}_{df} + \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j}_{\bar{d}f}$$

definiert, wobei nach wie vor

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$$

ist. Nach Definition ist f holomorph genau dann, wenn die Totalableitung df_z komplex-linear für alle $z \in U$ ist. Dies wiederum ist äquivalent dazu, dass f holomorph in jedem z_j ist. Dies ist bei $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0$ für $j = 1, \dots, n$ der Fall, und dies entspricht $\bar{d}f = 0$.

Falls $a \in \mathcal{E}(U)$ komplexwertig und glatt ist und $\omega = a dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$ ist, dann gilt

$$\begin{aligned} d\omega &= da \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial a}{\partial z_j} dz_j + \frac{\partial a}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \right) \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q} \\ &\in \mathcal{E}^{p+1,q}(U) + \mathcal{E}^{p,q+1}(U) \end{aligned}$$

und es folgt daher $d\mathcal{E}^{p,q} \subset \mathcal{E}^{p+1,q} + \mathcal{E}^{p,q+1}$ auf jeder komplexen Mannigfaltigkeit.

15.4.2. Die Dolbeault-Cohomologie

Nachdem wir die komplex- und anti-linearen glatten Differentialformen auf einer Mannigfaltigkeit nun genauer betrachtet haben, führen wir entsprechend zwei Differentialoperatoren ein. Durch die verwobene Struktur der beiden Elemente führt uns dies auf einen Doppelkomplex, mit dem wir eine weitere Cohomologietheorie erhalten.

Definition 161 (Differentialoperatoren): Für jede komplexen Mannigfaltigkeit X definieren wir die beiden **Differentialoperatoren**

$$\partial : \mathcal{E}^{p,q}(X) \longrightarrow \mathcal{E}^{p+1,q}(X) \quad \text{und} \quad \bar{\partial} : \mathcal{E}^{p,q} \longrightarrow \mathcal{E}^{p,q+1}(X) ,$$

sodass $d = \partial + \bar{\partial}$ auf $\mathcal{E}^{p,q}(X)$ gilt.

Für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}^n$ gilt dann wie oben nachgerechnet

$$\partial(a dz_I \wedge dz_j) = \partial a \wedge dz_I \wedge dz_j \quad \text{und} \quad \bar{\partial}(a dz_I \wedge dz_j) = \bar{\partial} a \wedge dz_I \wedge dz_j .$$

Satz 162: Es gilt $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$ auf $\mathcal{E}^{p,q}(X)$.

Ähnlich wie bei der de-Rham-Cohomologie im reellen Fall erhält man auch hier einen Komplex, genauer gesagt einen sogenannten **Doppel-Cokomplex**⁵

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{E}^{0,0}(X) & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{E}^{1,0}(X) & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{E}^{2,0}(X) & \xrightarrow{\partial} & \dots \\ \bar{\partial} \downarrow & & \bar{\partial} \downarrow & & \bar{\partial} \downarrow & & \\ \mathcal{E}^{0,1}(X) & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{E}^{1,1}(X) & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{E}^{2,1}(X) & \xrightarrow{\partial} & \dots \\ \bar{\partial} \downarrow & & \bar{\partial} \downarrow & & \bar{\partial} \downarrow & & \\ \mathcal{E}^{0,2}(X) & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{E}^{1,2}(X) & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{E}^{2,2}(X) & \xrightarrow{\partial} & \dots \\ \bar{\partial} \downarrow & & \bar{\partial} \downarrow & & \bar{\partial} \downarrow & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

Definition 163 (Dolbeault-Cohomologie): Für jede komplexe Mannigfaltigkeit X definieren wir die **Dolbeault-Cohomologiegruppen**

$$\begin{aligned} H_{\partial}^{p,q}(X) &:= \frac{\ker(\partial^{p,q} : \mathcal{E}^{p,q}(X) \longrightarrow \mathcal{E}^{p+1,q}(X))}{\text{im}(\partial^{p-1,q} : \mathcal{E}^{p-1,q}(X) \longrightarrow \mathcal{E}^{p,q}(X))} \quad \text{und} \\ H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X) &:= \frac{\ker(\bar{\partial}^{p,q} : \mathcal{E}^{p,q}(X) \longrightarrow \mathcal{E}^{p,q+1}(X))}{\text{im}(\bar{\partial}^{p,q-1} : \mathcal{E}^{p,q-1}(X) \longrightarrow \mathcal{E}^{p,q}(X))} , \end{aligned}$$

welche die **Dolbeault-Cohomologie** bilden, wobei $\partial^{p,q} := \partial|_{\mathcal{E}^{p,q}(X)}$ und $\bar{\partial}^{p,q} := \bar{\partial}|_{\mathcal{E}^{p,q}(X)}$ sei.

Definition 164 (Holomorphe p -Formen): Wir definieren $\Omega^p(X) := \ker(\bar{\partial}^{p,0}) = H_{\bar{\partial}}^{p,0}(X)$, dies ist die **Gruppe der holomorphen p -Formen auf X** .

⁵Nähere Informationen über diesen Doppelkomplex finden sich im Buch *Differential Forms in Algebraic Topology* von BOTT und TU unter dem Stichwort Čech-de Rham-Komplex.

Beispiel: Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Teilmenge, dann ist für eine beliebige holomorphe p -Form $\varphi = \sum_{|I|=p} a_I dz_I$ mit $a_I \in \mathcal{E}(U)$

$$\bar{\partial}\varphi = \sum_{|I|=p} \bar{\partial}a_I \wedge dz_I = 0$$

genau dann, wenn $\bar{\partial}a_I = 0$ gilt. Mit anderen Worten ist a_I dann holomorph.

Satz 165: Falls $f : X \rightarrow Y$ holomorph und $\omega \in \mathcal{E}^{p,q}(Y)$ eine p, q -Form ist, so gilt

$$f^*(\partial\omega) = \partial(f^*\omega) \quad \text{und} \quad f^*(\bar{\partial}\omega) = \bar{\partial}(f^*\omega),$$

deswegen induziert f einen Homomorphismus

$$f^* : H_{\partial}^{p,q}(Y) \rightarrow H_{\partial}^{p,q}(X) \quad \text{und} \quad f^* : H_{\bar{\partial}}^{p,q}(Y) \rightarrow H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X).$$

Satz 166: Falls X eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, $a \in \mathcal{E}^p(X)$ und $b \in \mathcal{E}^q(X)$, so gilt

$$\partial(a \wedge b) = (\partial a) \wedge b + (-1)^p a \wedge \partial b \quad \text{und} \quad \bar{\partial}(a \wedge b) = (\bar{\partial} a) \wedge b + (-1)^p a \wedge \bar{\partial} b.$$

Ähnlich wie schon im Auflösungsatz 156 von Seite 118 wollen wir nun eine azyklische Auflösung der Garbe der glatten p -Formen gewinnen. Dies liefert der folgende Satz.

Satz 167 (Auflösung holomorpher Formen): Sei X eine Riemannsche Fläche, und für $p = 0, 1$ sei Ω^p die Garbe $U \mapsto \Omega^p(U)$ auf X . Dann ist die Sequenz

$$0 \rightarrow \Omega^p(X) \rightarrow \mathcal{E}^{p,0}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{p,1}(X) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

eine azyklische Auflösung der Garbe Ω^p , also gilt $H^q(X; \Omega^p) \cong H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X)$ für $p = 0, 1$ und $q \geq 0$.

15.5. Differentialformen mit Werten in einem Vektorbündel

Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit und $E \rightarrow X$ ein glattes Vektorbündel über \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Eine (glatte) **p -Form auf X mit Werten in E** ist eine Vorschrift ω , die jedem Punkt $x \in X$ eine alternierende multilineare Abbildung

$$\omega(x) : \underbrace{T_x X \times \dots \times T_x X}_{p\text{-mal}} \rightarrow E_x := \pi^{-1}(x)$$

zuordnet, sodass für alle glatten Vektorfelder v_1, \dots, v_p auf X die Abbildung

$$\omega(v_1, \dots, v_p) : X \rightarrow E \quad x \mapsto \omega(x)(v_1(x), \dots, v_p(x))$$

glatt ist, also $\omega(v_1, \dots, v_p) \in \Gamma(E)$. Definiere

so kann $\mathcal{E}^p(X, E)$ auch aufgefasst werden, benutzen wir aber nicht

$$\mathcal{E}^p(X, E) := \{\text{glatte } p\text{-Formen auf } X \text{ mit Werten in } E\} = \overbrace{\Gamma(\Lambda^p \otimes E)}$$

und \mathcal{E}_E^p als die Garbe $U \mapsto \mathcal{E}^p(U, E)$ auf X , genauer $U \mapsto \mathcal{E}^p(U, E|_U)$. Falls $\varphi \in \mathcal{E}^p(X)$ und $s \in \Gamma(E)$ liegt, so definieren wird das **Tensorprodukt** $\varphi \otimes s \in \mathcal{E}^p(X, E)$ durch

$$(\varphi \otimes s)(v_1, \dots, v_p) := \varphi(v_1, \dots, v_p) \cdot s \in \Gamma(E),$$

wobei E für ein komplexwertiges φ auch ein komplexes Vektorbündel sein muss.

Das Vektorbündel E ist genau dann trivial, wenn es $r := \text{Rang}(E)$ Schnitte $s_1, \dots, s_r \in \Gamma(E)$ gibt, sodass $(s_1(x), \dots, s_r(x))$ für jedes $x \in X$ eine Basis für E_x ist.⁶ Die Menge (s_1, \dots, s_r) heißt dann **Basis aus Schnitten von E** . In diesem Fall existiert ein Isomorphismus

$$\underbrace{\mathcal{E}^p(X) \times \dots \times \mathcal{E}^p(X)}_{r\text{-mal}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}^p(X, E) \quad (\varphi_1, \dots, \varphi_r) \mapsto \sum_{j=1}^r \varphi_j \otimes s_j .$$

Das sogenannte **Dachprodukt** definiert nun eine $\mathcal{E}(X)$ -bilineare Abbildung

$$\mathcal{E}^p(X) \times \mathcal{E}^q(X, E) \longrightarrow \mathcal{E}^{p+q}(X, E) \quad (\varphi, \alpha) \mapsto \varphi \wedge \alpha .$$

Explizit gilt, falls v_1, \dots, v_{p+q} glatte Vektorfelder auf X sind, wie in der Analysis III

$$(\varphi \wedge \alpha)(v_1, \dots, v_{p+q}) := \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \text{sign}(\sigma) \varphi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \alpha(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}) ,$$

alternativ betrachte $\Lambda^p \otimes (\Lambda^q \otimes E) \xrightarrow{\cong} (\Lambda^p \otimes \Lambda^q) \otimes E \xrightarrow{\wedge \otimes \text{Id}} \Lambda^{p+q} \otimes E$. Es gilt

$$\varphi \wedge (\psi \wedge \alpha) = (\varphi \wedge \psi) \wedge \alpha$$

für $\varphi \in \mathcal{E}^p(X)$, $\psi \in \mathcal{E}^q(X)$ und $\alpha \in \mathcal{E}^s(X, E)$, d.h. das Dachprodukt ist assoziativ.

Die Frage ist nun: Gibt es ein äußeres Differential $\mathcal{E}^p(X, E) \longrightarrow \mathcal{E}^{p+1}(X, E)$? Im Allgemeinen gibt es so etwas nicht, allerdings schon, wenn man einen „Zusammenhang“ in E hat.

Definition 168 (Lokaler Operator): Seien $E \longrightarrow X$ und $F \longrightarrow X$ zwei glatte, komplexe Vektorbündel. Eine \mathbb{C} -lineare Abbildung $\mathcal{P} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(F)$ heißt **lokaler Operator**, falls für alle $s \in \Gamma(E)$ und $U \subset X$ offen gilt, dass aus $s|_U = 0$ direkt $(\mathcal{P}s)|_U = 0$ folgt.

Anders ausgedrückt hängt $(\mathcal{P}s)|_U$ nur von $s|_U$ ab.

Bemerkung: Falls $\mathcal{P} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(F)$ ein lokaler Operator, $U \subset X$ offen und $s \in \Gamma(E|_U)$ ein Schnitt sind, so definieren wir $\mathcal{P}s \in \Gamma(F|_U)$ wie folgt: Falls $x \in U$ liegt, wähle ein $t \in \Gamma(E)$ mit $s = t$ auf einer Umgebung von x . Dann ist

$$(\mathcal{P}s)(x) := (\mathcal{P}t)(x)$$

unabhängig vom gewählten Schnitt t , da \mathcal{P} ein lokaler Operator ist.

Definition 169 (Glatte p, q -Formen im Vektorbündel): Sei $E \longrightarrow X$ ein holomorphes Vektorbündel und $p, q \geq 0$. Dann definiere

$$\mathcal{E}^{p,q}(X, E) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Alle } \varphi \in \mathcal{E}^{p+q}(X, E), \text{ sodass für jede Basis } s_1, \dots, s_r \text{ von} \\ \text{Schnitten in } E|_U \text{ für } U \subset X \text{ offen und } \varphi = \sum_{j=1}^r \varphi_j \otimes s_j \\ \text{gilt, dass } \varphi_j \in \mathcal{E}^{p,q}(U) \text{ für jedes } j \text{ ist.} \end{array} \right\} .$$

⁶Es sei eine Übungsaufgabe diese Aussage explizit zu zeigen.

Satz 170: Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $E \rightarrow X$ ein holomorphes Vektorbündel sowie $p, q \geq 0$. Dann existiert genau ein lokaler Operator

$$\bar{\partial} : \mathcal{E}^{p,q}(X, E) \longrightarrow \mathcal{E}^{p,q+1}(X, E) ,$$

sodass für jede offene Teilmenge $U \subset X$, $\varphi \in \mathcal{E}^{p,q}(U)$ und $s \in \mathcal{O}(U, E)$ - die Menge der holomorphen Schnitte - gilt:

$$\bar{\partial}(\varphi \otimes s) = (\bar{\partial}\varphi) \otimes s .$$

Außerdem gilt $\bar{\partial}^2 = 0$.

Definition 171 (p -Formen-Cohomologie): Sei $E \rightarrow X$ ein holomorphe Vektorbündel, dann definiere

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, E) := \frac{\ker(\bar{\partial} : \mathcal{E}^{p,q}(X, E) \longrightarrow \mathcal{E}^{p,q+1}(X, E))}{\operatorname{im}(\bar{\partial} : \mathcal{E}^{p,q-1}(X, E) \longrightarrow \mathcal{E}^{p,q}(X, E))} .$$

Bemerkung: Die Menge $H_{\bar{\partial}}^{p,0}(X, E) = \ker(\bar{\partial} : \mathcal{E}^{p,0}(X, E) \longrightarrow \mathcal{E}^{p,1}(X, E))$ entspricht der Menge der holomorphen p -Formen mit Werten in E . Definiere Ω_E^p als die Garbe $U \mapsto H_{\bar{\partial}}^{p,0}(U, E)$.

Satz 172 (Auflösung holomorpher p -Formen): Sei X eine Riemannsche Fläche und $E \rightarrow X$ ein holomorphes Vektorbündel. Dann ist für $p = 0, 1$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow \Omega_E^p \longrightarrow \mathcal{E}_E^{0,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}_E^{0,1} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

eine azyklische Auflösung der Garbe Ω_E^p auf X , deswegen ist für $p, q = 0, 1$

$$H^q(X, \Omega_E^p) \cong H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, E) .$$

15.6. Hilberträume

15.6.1. Fundamentale Eigenschaften von Hilberträumen

Definition 173 (Hilbertraum): Ein (bezüglich der induzierten Metrik) vollständiger (reeller oder komplexer) Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt **Hilbertraum**.

Beispiel: Für $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig definiere die Norm

$$\|f\|_{L^2(U)} := \sqrt{\int_U |f|^2} \in [0, \infty] ,$$

eigentlich bezüglich des Lebesgue-Integral, dies soll aber nicht weiter ausgeführt werden. Wir definieren damit den Raum

$$L^2(U; \mathcal{O}) := \{f \in \mathcal{O}(U) : \|f\|_{L^2(U)} < \infty\} ,$$

und auf diesem ein Skalarprodukt durch die Abbildung

$$\langle f, g \rangle := \int_U f \cdot \bar{g} \in \mathbb{C} .$$

Dieses Integral ist wohldefiniert, weil die Abschätzung

$$\int_U |f\bar{g}| \stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \|f\|_{L^2(U)} \cdot \|g\|_{L^2(U)}$$

gilt. Um zu zeigen, dass $(L^2(U; \mathcal{O}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vollständig ist, benötigen wir den folgenden Hilfssatz:

Lemma 174: Falls $U := D_r(z_0) \subset \mathbb{C}$ mit $r > 0$ eine Kreisscheibe ist, so gilt die Abschätzung

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot r} \|f\|_{L^2(U)}$$

für alle holomorphen Funktionen $f \in \mathcal{O}(U)$.

Satz 175: Für jedes offene $U \subset \mathbb{C}$ ist der Raum $L^2(U; \mathcal{O})$ ein Hilbertraum.

Wir benötigen noch einige Begriffe aus der Funktionalanalysis:

Definition 176 (Kompakter Operator): Eine lineare Abbildung $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ zwischen zwei Hilberträumen heißt **kompakter Operator**, falls die folgenden zwei äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

1. Für jede beschränkte Teilmenge $A \subset \mathcal{H}$ ist das Bild $TA \subset \mathcal{H}'$ **relativ kompakt**, d.h. der Abschluß \overline{TA} ist kompakt.
2. Für jede beschränkte Folge $\{x_n\}$ in \mathcal{H} besitzt die Bildfolge $\{Tx_n\}$ eine konvergente Teilfolge.

Satz 177: Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offene Teilmengen, sodass $V \subset U$ relativ kompakt in U ist. Dann ist die Beschränkungsabbildung $L^2(U; \mathcal{O}) \rightarrow L^2(V; \mathcal{O})$ ein kompakter Operator.

Satz 178 (Besselsche Ungleichung): Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum und $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ eine **orthonormierte Teilmenge** in \mathcal{H} , d.h. es gilt $\langle x_m, x_n \rangle = \delta_{mn}$ für alle m und n . Dann gilt für alle $x \in \mathcal{H}$ die Besselsche Ungleichung

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$$

und insbesondere geht die Folge $\langle x, x_n \rangle \rightarrow 0$.

Definition 179 (Lokal kompakter Hilbertraum): Ein Hilbertraum \mathcal{H} heißt **lokal kompakt**, falls $0 \in \mathcal{H}$ eine kompakte Umgebung besitzt.

Eine intuitive Vermutung über die Form solcher Hilberträume bestätigt sich direkt im folgenden Satz.

Satz 180: Ein Hilbertraum ist genau dann lokal kompakt, wenn er endlichdimensional ist.

15.6.2. Funktionalanalytische Hilfsmittel

Um den genannten funktionalanalytischen Satz zu beweisen, benötigen wir noch vier kleinere Hilfssätze:

Lemma 181: Seien A und B normierte Vektorräume und $T : A \rightarrow B$ eine lineare Abbildung zwischen diesen. Dann gilt: T ist genau dann stetig, wenn eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass $\|Ta\| \leq C\|a\|$ für alle $a \in A$ gilt. \square

Lemma 182: Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum und $M \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener, linearer Unterraum. Wir definieren das orthogonale Komplement von M in \mathcal{H} wie üblich bezüglich des Skalarprodukts durch

$$M^\perp := \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = 0 \text{ für alle } y \in M\} .$$

Dann ist (ähnlich der endlichdimensionalen linearen Algebra) $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$, d.h. insbesondere gilt $M \cap M^\perp = \{0\}$, $\mathcal{H} = M + M^\perp$ und $M, M^\perp \subset \mathcal{H}$ sind abgeschlossen. \square

Lemma 183 (Satz der offenen Abbildung): Jeder surjektive, beschränkte Operator $B : B_1 \rightarrow B_2$ zwischen zwei Banachräumen⁷ ist eine offene Abbildung. \square

Lemma 184: Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum, $K : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ein kompakter Operator und durch $T := \text{Id} - K : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ein beschränkter Operator definiert. Dann ist $\text{coker}(T)$ endlichdimensional.

Bemerkung: Es gilt auch $\dim \ker(T) = \dim \text{coker}(T) < \infty$, d.h. T ist eine **Fredholm-Operator** vom Index 0, wobei der Index durch $\dim \ker(T) - \dim \text{coker}(T)$ definiert ist. Der Satz gilt auch für Banachräume.

Satz 185: Seien \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 zwei Hilberträume, $S : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ ein beschränkter Operator (also eine stetige, lineare Abbildung) und $K : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ ein kompakter Operator. Falls S surjektiv ist, so ist der Kokern $\text{coker}(S + K) := \mathcal{H}_2 / \text{im}(S + K)$ endlichdimensional.⁸

⁷Ein **Banachraum** ist ein vollständiger normierter Raum.

⁸Für die Anschauung ist es hilfreich, den kompakten Operator K als kleine „Störung“ zu betrachten.

\mathcal{C}_X	Garbe $U \mapsto \mathcal{C}(U) := \{\text{stetige Funktionen } U \rightarrow \mathbb{C}\}$
\mathcal{E}_X	Garbe $U \mapsto \mathcal{E}(U) := \{\text{glatte Funktionen } U \rightarrow \mathbb{C}\}$
\mathcal{O}_X	Garbe $U \mapsto \mathcal{O}(U) := \{\text{holomorphe Funktionen } U \rightarrow \mathbb{C}\}$
\mathcal{M}_X	Garbe $U \mapsto \mathcal{M}(X) := \{\text{meromorphe Funktionen } U \rightarrow \mathbb{C}\}$
\mathcal{O}_X^B	Prägarbe $U \mapsto \mathcal{O}^B(U) := \{\text{beschränkte holomorphe Funktionen } U \rightarrow \mathbb{C}\}$
\mathcal{O}_X^*	Garbe $U \mapsto \mathcal{O}^*(U) := \{\text{holomorphe Funktionen } U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$
\mathcal{M}_X^*	Garbe $U \mapsto \mathcal{M}^*(U) := \left\{ \begin{array}{l} \text{meromorphe Funktionen auf } U, \text{ die auf keiner} \\ \text{offenen Teilmenge identisch Null sind} \end{array} \right\}$
\mathcal{D}_X	Garbe $U \mapsto \mathcal{D}(U) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Funktionen } \phi : U \rightarrow \mathbb{Z} \text{ mit } \phi^{-1}(0) \\ \text{offen und } U \setminus \phi^{-1}(0) \text{ diskret} \end{array} \right\}$
$\mathcal{E}_{X,\mathbb{K}}^*$	Garbe $U \mapsto \mathcal{E}_{\mathbb{K}}^*(U) := \{\text{glatte Funktionen } U \rightarrow \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}\}$
$\mathcal{C}_{X,\mathbb{K}}^*$	Garbe $U \mapsto \mathcal{C}_{\mathbb{K}}^*(U) := \{\text{stetige Funktionen } U \rightarrow \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}\}$
\mathcal{E}_E	Garbe $U \mapsto \Gamma(E _U) := \{\text{glatte Schnitte von } E \text{ über } U\}$
\mathcal{O}_E	Garbe $U \mapsto \mathcal{O}(U, E) := \{\text{holomorphe Schnitte von } E \text{ über } U\}$
\mathcal{M}_E	Garbe $U \mapsto \mathcal{M}(U, E) := \{\text{meromorphe Schnitte von } E \text{ über } U\}$
\mathcal{M}_E^*	Garbe $U \mapsto \mathcal{M}^*(U, E) := \left\{ \begin{array}{l} \text{meromorphe Schnitte von } E \text{ über } U, \text{ die auf} \\ \text{keiner offenen Teilmenge identisch Null sind} \end{array} \right\}$
\mathcal{E}_X^p	Garbe $U \mapsto \mathcal{E}_X^p(U) := \{\text{glatte } p\text{-Formen auf } U\} = \Gamma(U, \Lambda^p)$
Ω_X^p	Garbe $U \mapsto \Omega_X^p(U) := \{\text{holomorphe } p\text{-Formen auf } U\}$
$\mathcal{E}_X^{0,1}$	Garbe $U \mapsto \mathcal{E}_X^{0,1}(U) := \{\text{An allen Punkten komplex-lineare 1-Formen } \omega \in \mathcal{E}_X^1(U)\}$
$\mathcal{E}_X^{1,0}$	Garbe $U \mapsto \mathcal{E}_X^{1,0}(U) := \{\text{Für alle Punkte anti-lineare 1-Formen } \omega \in \mathcal{E}_X^1(U)\}$
$\mathcal{E}_X^{p,q}$	Garbe $U \mapsto \mathcal{E}_X^{p,q}(U) := \left\{ \begin{array}{l} \text{endliche Summen von } (p+q)\text{-Formen auf } X \text{ der Gestalt} \\ \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_q, \text{ wobei } \alpha_j \in \mathcal{E}_X^{1,0}(X) \text{ und} \\ \beta_j \in \mathcal{E}_X^{0,1}(X) \text{ für alle } j \text{ ist.} \end{array} \right\}$
\mathcal{E}_E^p	Garbe $U \mapsto \mathcal{E}^p(U, E) := \{\text{glatte } p\text{-Formen auf } U \text{ mit Werte im VB } E\}$
Ω_E^p	Garbe $U \mapsto H_{\bar{\partial}}^{p,0}(U, E) := \{\text{holomorphe } p\text{-Formen auf } U \text{ mit Werten im VB } E\}$
$\mathcal{E}_E^{p,q}$	Garbe $U \mapsto \mathcal{E}^{p,q}(U, E) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Alle } \varphi \in \mathcal{E}^{p+q}(X, E), \text{ sodass für jede Basis } s_1, \dots, s_r \text{ von} \\ \text{Schnitten in } E _U \text{ für } U \subset X \text{ offen und } \varphi = \sum_{j=1}^r \varphi_j \otimes s_j \\ \text{gilt, dass } \varphi_j \in \mathcal{E}^{p,q}(U) \text{ für jedes } j \text{ ist.} \end{array} \right\}$

Tabelle 15.1.: Übersicht über sämtliche spezielle Prägarben und Garben.

16. Geschlecht, Divisoren und Schnitte

Nach den zahlreichen Teilergebnissen der letzten Kapitel wollen wir nun schließlich wieder den Bogen zur Funktionentheorie einschlagen. In diesem Kapitel fließen daher alle vorigen Abschnitte zusammen.

16.1. Endlichkeitssätze

Wie schon auf Seite 118 in der Definition 157 des Geschlechts einer Riemannsche Fläche angedeutet, müssen wir noch die Wohldefiniertheit zeigen, d.h. die Endlichkeit der Dimension der Cohomologiegruppe $H^1(X; \mathcal{O})$.

16.1.1. Der Hilbertraum der holomorphen Vektorbündel-Schnitte

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $E \rightarrow X$ ein holomorphes Vektorbündel. Dann definiere

$$\mathcal{O}_E := \{\text{Garbe holomorpher Schnitte von } E\} .$$

Wir werden zeigen, dass die Garbencohomologiegruppen $H^p(X; \mathcal{O}_E)$ immer endlichdimensional sind. Wir wissen schon: Für $p > 1$ ist diese Homologiegruppe dann immer gleich Null.

Sei $r := \text{Rang}(E)$ die Faser-Dimension des Vektorbündels. Wähle (U_j, φ_j, ψ_j) für $j \in I$, wobei I eine endliche Menge sei und folgende Bedingungen gelten sollen:

1. Die $U_j \subset X$ sind offene Teilmengen.
2. Jedes $\varphi_j : U_j \xrightarrow{\approx} U'_j \subset \mathbb{C}$ ist eine biholomorphe Abbildung mit $\varphi_j(V_j) = D$.
3. Jedes $\psi_j : E|_{U_j} \xrightarrow{\approx} U'_j \times \mathbb{C}^r$ ist ebenfalls biholomorph, und bildet jede Faser E_x linear auf $\{\varphi_j(x)\} \times \mathbb{C}^r$ ab.

Diese Aufstellung von Funktionen und Mengen entspricht dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E|_{U_j} & \xrightarrow[\psi_j]{\approx} & U'_j \times \mathbb{C}^r \\ \downarrow \circlearrowleft & & \downarrow \\ U_j & \xrightarrow[\varphi_j]{\approx} & U'_j \end{array} .$$

Außerdem sei $\bar{D} \subset U'_j$, dann setzen wir $V_j := \varphi_j^{-1}(D)$ und $W_j := \varphi_j^{-1}(D_{1/2})$. Dabei nehmen wir an, dass $X = \bigcup_{j \in I} W_j$ ist.

Auf dem Raum $\mathcal{H} := \mathcal{O}(X; E) = \{\text{holomorphe Schnitte von } E\}$ werden wir ein Skalarprodukt definieren, und ihn somit zu einem Hilbertraum machen. Für jedes $s \in \mathcal{H}$ sei $s^{jk} \in \mathcal{O}(U'_j)$ für $j \in I$ und $1 \leq k \leq r$ definiert durch

$$\psi_j \circ s \circ \varphi_j^{-1}(z) = \left(z, \underbrace{s^{j1}(z), \dots, s^{jr}(z)}_{s^j(z) \in \mathbb{C}^r} \right) .$$

Das Skalarprodukt auf \mathcal{H} definieren wir dann wie folgt: Für zwei Schnitte $s, t \in \mathcal{H} = \mathcal{O}(X; E)$ sei

$$\langle s, t \rangle_{\mathcal{H}} := \sum_{j,k} \int_D s^{jk} \overline{t^{jk}} = \sum_j \int_D \langle s^j, t^j \rangle_{\mathbb{C}^n},$$

wobei letztes Skalarprodukt dem üblichen \mathbb{C}^n -Skalarprodukt entspricht. Die Vollständigkeit von \mathcal{H} folgt, da $L^2(D; \mathcal{O})$ ein Hilbertraum ist, wie wir in Satz 175 gezeigt haben. Also erhalten wir den **Hilbertraum der holomorphen Schnitte von E** .

Bemerkung: 1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $E \rightarrow U$ ein triviales Vektorbündel. Falls $\varphi : E|_U \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{C}^r$ eine Trivialisierung ist, so ist jedes $s \in \Gamma(E)$ gegeben durch eine Abbildung $s^\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}^r$. Falls ψ eine andere Trivialisierung von E ist, so gilt für den Trivialisierungswechsel von φ nach ψ

$$s^\psi = g \cdot s^\varphi \quad \text{mit} \quad g : U \rightarrow \mathbb{M}_{r \times r}(\mathbb{C}).$$

Es folgt mit der **Operatornorm** die punktweise Abschätzung $|s^\psi| \leq |g| \cdot |s^\varphi|$, und damit

$$\int_U |s^\psi|^2 \leq \sup_{x \in U} |g(x)|^2 \cdot \int_U |s^\varphi|^2.$$

2. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ zwei offene Teilmengen mit einem orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $\varphi : U \xrightarrow{\cong} V$ und einer stetigen Funktion $f : V \rightarrow [0, \infty[$. Dann gilt mit der Analysis II-Transformationsformel (vgl. Seite ??)

$$\int_V f = \int_U (f \circ \varphi) \det(D\varphi) \leq \sup_{x \in U} \det(D\varphi(x)) \cdot \int_U f \circ \varphi.$$

3. Es gilt allgemein, dass die direkte Summe $\mathcal{H}' := \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_r$ von Hilberträumen \mathcal{H}_i wieder einen Hilbertraum bildet, für den das Skalarprodukt dann kanonisch durch

$$\langle (x_1, \dots, x_r), (y_1, \dots, y_r) \rangle_{\mathcal{H}'} = \sum_{j=1}^r \langle x_j, y_j \rangle_{\mathcal{H}_j}$$

gegeben ist.

Satz 186 (Erster Endlichkeitssatz): Die Cohomologiegruppe $H^0(X; \mathcal{O}_E) \stackrel{\text{Satz 172}}{=} \mathcal{O}(X, E) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}$ ist endlichdimensional.

16.1.2. Cohomologie quadratintegrabler holomorpher Schnitte

Definition 187 (Quadratintegrale holomorphe Schnitte): Für jede offene Teilmenge $A \subset U_j$ mit kompaktem Abschluß in U_j definiere

$$L^2_{(j)}(A, \mathcal{O}_E) := \left\{ s \in \mathcal{O}(A, E) : \int_{\varphi_j(A)} |s^j|^2 < \infty \right\}$$

als die Menge der holomorphen Schnitte $s_j : \varphi_j(A) \rightarrow \mathbb{C}^r$ von $E|_A$, die bezüglich φ_j und ψ_j quadratintegrabel sind.

Diese Menge $L^2_{(j)}(A, \mathcal{O}_E)$ bildet zudem wieder einen Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle s, t \rangle_{L^2_{(j)}(A, \mathcal{O}_E)} := \int_{\varphi_j(A)} \langle s^j, t^j \rangle_{\mathbb{C}^r} .$$

Außerdem definieren wir nun für die endliche Überdeckung $\mathfrak{V} := \{V_j\}_{j \in I}$ den **Cokettenkomplex quadratintegrabler holomorpher Schnitte**

$$C^p_0(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E) := \bigoplus_{(j_0, \dots, j_p) \in I^p} L^2_{(j_0)}(V_{j_0, \dots, j_p}, \mathcal{O}_E) ,$$

wobei die Wahl des j_0 in $L^2_{(j_0)}(V_{j_0, \dots, j_p}, \mathcal{O}_E)$ eigentlich unwichtig ist. Auch diese Menge bildet wieder einen Hilbertraum, und ist zudem ein Untervektorraum der ursprünglichen abelschen Čech-Coketten-Gruppe (vgl. Definition auf Seite 101)

$$C^p(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E) = \bigoplus_{(j_0, \dots, j_p) \in I^p} \mathcal{O}(V_{j_0, \dots, j_p}, E) .$$

Der Ableitungsoperator $d : C^p_0(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E) \rightarrow C^{p+1}_0(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E)$ sei genau wie vorher (vgl. Seite 102) definiert, stellt aber nun zusätzlich noch eine Abbildung zwischen zwei Hilberträumen dar. Es bleibt die Frage, ob diese Abbildung stetig ist. Dazu betrachte den Ableitungsoperator explizit für eine p -Cokette $c \in C^p_0(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E)$:

$$(dc)(j_0, \dots, j_{p+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k c(j_0, \dots, \hat{j}_k, \dots, j_{p+1}) \Big|_{V_{j_0, \dots, j_{p+1}}}$$

Die Stetigkeit folgt dann aus den ersten beiden Bemerkungen der vorigen Seite, da V_j einen kompakten Abschluß in U_j hat.

Mit dem soeben definierten Cokettenkomplex und der Randabbildung definieren wir den Raum der zugehörigen **Cozykeln quadratintegrabler holomorpher Schnitte**

$$Z^p_0(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E) := \ker(d : C^p_0(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E) \rightarrow C^{p+1}_0(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E))$$

sowie der **Coränder quadratintegrabler holomorpher Schnitte**

$$B^p_0(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E) := \text{im}(d : C^{p-1}_0(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E) \rightarrow C^p_0(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E)) = d(C^{p-1}_0(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E))$$

und schließlich die durch Quotientenbildung entstehenden **Cohomologiegruppen quadratintegrabler holomorpher Schnitte**

$$H^p_0(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E) := \frac{Z^p_0(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E)}{B^p_0(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E)} = \frac{\ker(d : C^p_0(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E) \rightarrow C^{p+1}_0(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E))}{\text{im}(d : C^{p-1}_0(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E) \rightarrow C^p_0(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E))} .$$

Nun ist der Cokettenkomplex quadratintegrabler holomorpher Schnitte $C^*_0(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E) \subset C^*(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E)$ ein Unterkomplex des ursprünglichen Čech-Coketten-Komplexes, und die Inklusion definiert einen Homomorphismus

$$H^p_0(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E) \xrightarrow{\iota_{\mathfrak{V}}} H^p(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E)$$

zwischen der Cohomologie quadratintegrabler holomorpher Schnitte und der Čech-Cohomologie für die Garbe \mathcal{O}_E .

Lemma 188: Die beiden Abbildung $\iota_{\mathfrak{W}}$ der folgenden Sequenz sind Isomorphismen:

$$\underbrace{H_0^1(\mathfrak{W}; \mathcal{O}_E)}_{L^2\text{-}\mathcal{O}_E\text{-Cohomologie}} \xrightarrow[\cong]{\iota_{\mathfrak{W}}} \underbrace{H^1(\mathfrak{W}; \mathcal{O}_E)}_{\check{\text{Cech-Cohomologie}}} \xrightarrow[\cong]{i_{\mathfrak{W}}} \underbrace{H^1(X; \mathcal{O}_E)}_{\text{Garben-Cohomologie}} .$$

Bemerkung: Weil sich für Kreisradien $r > 1$ die Riemannsche Fläche X durch $\bigcup_{j \in I} \varphi_j^{-1}(D_r)$ überdecken lässt - schließlich ist nach Voraussetzung $\bar{D} \subset U'_j$, und die Urbilder $\varphi_j^{-1}(D)$ überdecken bereits X (vgl. Konstruktion auf Seite 128) - so gilt der Satz auch mit \mathfrak{V} statt \mathfrak{W} :

$$\begin{array}{ccc} H_0^1(\mathfrak{V}; \mathcal{O}_E) & \xrightarrow{\cong} & H^1(X; \mathcal{O}_E) \\ \cong \downarrow & \nearrow \cong & \\ H_0^1(\mathfrak{W}; \mathcal{O}_E) & & \end{array}$$

Im Anschluß formulieren wir nun den zweiten Endlichkeitssatz.

16.1.3. Wohldefiniertheit des Geschlechts

Satz 189 (Zweiter Endlichkeitssatz): Die Cohomologiegruppe $H^1(X; \mathcal{O}_E)$ ist endlichdimensional.

Korollar 190 (Wohldefiniertheit des Geschlechts): Für jede kompakte Riemannsche Fläche X ist das Geschlecht $g := \dim_{\mathbb{C}} H^1(X; \mathcal{O}) < \infty$, also wohldefiniert.

16.2. Meromorphe Schnitte von Vektorbündeln

Satz 191: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $a \in X$. Dann existiert eine holomorphe Funktion auf $X \setminus \{a\}$, die in a einen Pol hat.

Satz 192: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, $E \subset X$ eine endliche Teilmenge und $u : E \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung. Dann existiert ein $f \in \mathcal{M}(X)$ mit $f|_E = u$.

Falls nun X eine kompakte Riemannsche Fläche und $E \rightarrow X$ ein holomorphes Vektorbündel sind, so haben wir bewiesen, dass die Cohomologiegruppe $H^q(X; \Omega_E^p)$ endlichdimensional für $p = 0$ ist. Es sei

$$\begin{aligned} \Omega_E^0 &= \mathcal{O}_E = \{\text{Garbe der holomorphen Schnitte von } E\} \quad \text{und} \\ \Omega_E^p &= \{\text{Garbe der holomorphen } p\text{-Formen auf } X \text{ mit Werten in } E\} , \end{aligned}$$

dann ist $\Omega_E^p = 0$ falls $p \neq 0$ oder 1 ist. Die Frage ist nun, ob auch die Cohomologiegruppe $H^q(X; \Omega_E^1)$ endlichdimensional ist.

Betrachte dazu zuerst eine beliebige komplexe Mannigfaltigkeit X und ein holomorphes Vektorbündel $E \rightarrow X$. Dann sei $F := \text{Hom}_{\mathbb{C}}(TX, E)$ ein weiteres holomorphes Vektorbündel über X , in dem jede Faser die Form $F_x = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(T_x X, E_x)$ hat. Mit diesem Vektorbündel gilt dann

$$\mathcal{O}(X, F) = \Omega^1(X, E) \quad \text{mit} \quad \Omega^1(X, E) = \ker(\bar{\partial}) \subset \mathcal{E}^{1,0}(X, E) .$$

Um diese Gleichheit zu sehen, betrachte den Fall $X = U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $E = U \times \mathbb{C}$, dann ist dz_1, \dots, dz_n eine Basis holomorpher Schnitte von F . $F = \Lambda^{1,0}$ ist das Dualbündel des holomorphen Vektorbündels TX - man beachte, dass T^*X das reelle Dualbündel bezeichnet - also

gilt

$$\mathcal{O}(U, F) = \left\{ \sum_{j=1}^n f_j dz_j : f_j \in \mathcal{O}(U) \right\} = \Omega^1(U) ,$$

und damit folgt $\mathcal{O}_F = \Omega_E^1$. Also haben wir den nachfolgenden Endlichkeitssatz bewiesen.

Satz 193: *Ist X eine kompakte Riemannsche Fläche und $E \rightarrow X$ ein holomorphes Vektorbündel, so ist die Cohomologiegruppe $H^q(X; \Omega_E^p)$ endlichdimensional für alle p, q und verschwindet für $p, q \neq 0$ oder 1. Aus diesem Grund hat der Operator*

$$\bar{\partial} : \mathcal{E}_E^{p,0} \rightarrow \mathcal{E}_E^{p,1}$$

einen endlichdimensionalen Kern $H^0(X; \Omega_E^p)$ und Cokern $H^1(X; \Omega_E^p)$. □

Definition 194 (Ordnung eines Schnitts): Sei X eine Riemannsche Fläche, $E \rightarrow X$ ein holomorphes Vektorbündel, $a \in X$ und s ein holomorpher Schnitt von $E|_{X \setminus \{a\}}$. Wir definieren die **Ordnung des Schnitts** $\text{ord}_a(s) \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ wie folgt: Sei (U, φ) eine Karte für X um a mit $\varphi(a) = 0$, dann sei

$$\text{ord}_a(s) := \sup_{n \in \mathbb{Z}} \{ \varphi^{-n} s \text{ hat eine holomorphe Fortsetzung auf } X \} .$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Karte φ .

Falls E ein Produktbündel $X \times \mathbb{C}^r$ ist und ein Schnitt $s \in \mathcal{O}(X \setminus \{a\}, E)$ gegeben ist durch $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}(X \setminus \{a\})$, so gilt

$$\text{ord}_a(s) = \min_{j=1, \dots, r} \text{ord}_a(f_j) .$$

Dann heißt a **Nullstelle** bzw. **Pol des Schnitts s der Ordnung $k \geq 1$** , wenn $\text{ord}_a(s) = k$ bzw. $\text{ord}_a(s) = -k$ gilt.

Definition 195 (Meromorpher Schnitt): Sei X eine komplexe (nicht zwingend zusammenhängende) 1-Mannigfaltigkeit und $E \rightarrow X$ ein holomorphes Vektorbündel. Unter einem **meromorphen Schnitt von E** verstehen wir ein Paar (U, s) , wobei $U \subset X$ offen mit $X \setminus U$ diskret und $s \in \mathcal{O}(U, E)$ ist, sodass $\text{ord}_a(s) > -\infty$ für alle $a \in X \setminus U$ gilt.

Wir bezeichnen die **Menge der meromorphen Schnitte von E** mit $\mathcal{M}(X, E)$ und außerdem

$$\mathcal{M}^*(X, E) := \{ s \in \mathcal{M}(X, E) : s \neq 0 \text{ auf jeder nicht-leeren offenen Teilmenge von } X \} .$$

Satz 196: *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, $E \rightarrow X$ ein holomorphes Vektorbündel und $a \in X$. Dann existiert ein holomorpher Schnitt von E über $X \setminus \{a\}$, der in a einen Pol hat.*

16.3. Divisoren und Geradenbündel

Sei X eine Riemannsche Fläche und $U \subset X$ eine offene Teilmenge. Auf Seite 102 hatten wir bereits einen Divisor auf U definiert, dies war eine Abbildung $D : U \rightarrow \mathbb{Z}$, sodass es für jede kompakte Teilmenge $K \subset U$ nur endlich viele $x \in K$ mit $D(x) \neq 0$ gibt. Es ist

$$\text{Div}(U) := \{ \text{Divisoren auf } U \}$$

eine abelsche Gruppe. Falls $f \in \mathcal{M}^*(U)$ ist, so ist die Abbildung $x \mapsto \text{ord}_x(f)$ ein Divisor auf U , der mit (f) bezeichnet wird. Solche Divisoren heißen **Hauptdivisoren**. Wir bezeichnen

$$\text{Div}_H(U) := \{ \text{Bild des Gruppenhomomorphismus } \mathcal{M}^*(U) \longrightarrow \text{Div}(U) \text{ mit } f \mapsto (f) \} .$$

Zwei Divisoren $D, D' \in \text{Div}(U)$ heißen äquivalent, wenn die Differenz $D - D' \in \text{Div}_H(U)$ liegt.

Sei nun $L \longrightarrow X$ ein holomorphes Geradenbündel. Jeder meromorphe Schnitt $s \neq 0$ von L definiert einen Divisor

$$(s) : x \mapsto \text{ord}_x(s) .$$

Falls s_1 und s_2 zwei solche Schnitte sind, so gilt $s_2 = f \cdot s_1$ für ein passendes $f \in \mathcal{M}^*(X)$ und $(s_2) = (f) + (s_1)$.

Satz 197: Für jede kompakte Riemannsche Fläche X ist die oben definierte Abbildung

$$H^1(X; \mathcal{O}^*) \xrightarrow[\cong]{\text{div}} \text{Div}(X) / \text{Div}_H(X)$$

ein Gruppenisomorphismus.¹

Bemerkung: Sei X eine Riemannsche Fläche. Die kurze exakte Sequenz von Garbe

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow \mathcal{M}^* \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow 0$$

auf X , wobei $\mathcal{D}(U) = \text{Div}(U)$ sei, liefert eine lange exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & \mathcal{M}^*(X) & \longrightarrow & \mathcal{D}(X) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X; \mathcal{O}^*) & \longrightarrow & H^1(X; \mathcal{M}^*) & \longrightarrow & H^1(X; \mathcal{D}) & \longrightarrow & \dots \\ & & \parallel & & \parallel & & & & & & & & \\ & & H^0(X; \mathcal{M}^*) & & \text{Div}(X) & & & & & & & & \end{array}$$

Der von δ induzierte Homomorphismus $\text{Div}(X) / \text{Div}_H(X) \longrightarrow H^1(X; \mathcal{O}^*)$ ist genau $-\text{div}^{-1}$, also ein Isomorphismus - zumindest wenn X kompakt ist.

Es ist einfach zu sehen, dass \mathcal{D} eine feine Garbe ist (falls $\beta : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ eine Abbildung ist, so definiert die Multiplikation mit β einen Homomorphismus $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$), also folgt $H^p(X; \mathcal{D}) = 0$ für $p > 0$ und damit erhalten wir:

Satz 198: Für jede kompakte Riemannsche Fläche X ist $H^1(X; \mathcal{M}^*) = 0$.

16.4. Residuen holomorpher 1-Formen

Definition 199 (Residuen holomorpher Formen): Sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge und $a \in U$. Das **Residuum einer holomorpher 1-Form $f dz$ auf $U \setminus \{a\}$** , also $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$, ist definiert als

$$\text{res}_a(f dz) := \text{res}_a(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} f(z) dz ,$$

falls $\overline{D_r(a)} \subset U$ eine abgeschlossene Kreisscheibe ist.

¹Es sei daran erinnert, dass wir in Satz 122 von Seite 108 gezeigt haben, dass es eine bijektive Abbildung zwischen $H^1(X; \mathcal{O}^*)$ und den Isomorphismenklassen holomorpher Geradenbündel über X gibt.

Lemma 200: Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen, $g : U \rightarrow V$ holomorph, $a \in U$, $b := g(a)$ das Bild unter a und $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{b\})$. Dann gilt für das Residuum

$$\operatorname{res}_a(g^*(f dz)) = \operatorname{res}_b(f dz) .$$

Definition 201 (Residuum einer 1-Form): Sei X eine Riemannsche Fläche, $a \in X$ ein Punkt und $\omega \in \Omega^1(X \setminus \{a\})$ eine holomorphe 1-Form. Sei außerdem (U, φ) eine Karte von X um a und $\psi := \varphi^{-1}$, dann ist das **Residuum der holomorphen 1-Form ω am Punkt a** definiert als

$$\operatorname{res}_a(\omega) := \operatorname{res}_{\varphi(a)}(\psi^*\omega) .$$

Diese Definition hängt nach dem dem vorigen Hilfssatz nicht von der Wahl von φ ab.

Satz 202 (Residuensatz): Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, $E \subset X$ eine endliche Teilmenge und $\omega \in \Omega^1(X \setminus E)$. Dann gilt für die Summe der Residuen

$$\sum_{a \in E} \operatorname{res}_a(\omega) = 0 .$$

Bemerkung: Eine Riemannsche Fläche besitzt eine kanonische Orientierung als glatte 2-Mannigfaltigkeit. Ist $0 \neq v \in T_p X$, so ist (v, iv) eine positive Basis von $T_p X$. Dies ist geometrisch offenbar, wenn man die Multiplikation mit „ i “ als 90° -Drehung in der komplexen Ebene auffasst.

Definition 203 (Grad): Für jede kompakte Riemannsche Fläche X definiere den **Grad-Homomorphismus** für einen Divisor durch

$$\operatorname{deg} : \operatorname{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z} \quad D \mapsto \sum_{x \in X} D(x) ,$$

man beachte dass dies eine endliche Summe und somit wohldefiniert ist.

Satz 204: Jeder Hauptdivisor auf einer kompakten Riemannschen Fläche hat den Grad 0.

Anders ausgedrückt: Jede meromorphe Funktion $f \neq 0$ auf der Riemannschen Fläche X hat (mit Vielfachheiten gezählt) ebensoviele Nullstellen wie Pole.

Bemerkung: Dieses Ergebnis ist schon bekannt. Der alte Beweis (vgl. Satz 24 auf Seite 78) verwendete für eine holomorphe Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ die Vielfachheiten

$$\sum_{p \in f^{-1}(0)} v_p(f) = \sum_{p \in f^{-1}(\infty)} v_p(f) = \operatorname{deg}(f) .$$

Korollar 205: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, dann induziert der Gradhomomorphismus $\operatorname{deg} : \operatorname{div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ einen Homomorphismus

$$\operatorname{deg} : \underbrace{\operatorname{div}(X) / \operatorname{div}_H(X)}_{\cong H^1(X; \mathcal{O}^*)} \rightarrow \mathbb{Z}$$

wobei noch einmal an die Bijektion zwischen $H^1(X; \mathcal{O}^*)$ und den Isomorphismenklassen holomorpher Geradenbündel erinnert werden soll. Folglich kann man Geradenbündeln so eine ganze Zahl zuordnen.

16.5. Cohomologie und Geradenbündel

Sei X ein parakompakter Raum (vgl. Definition 140 von Seite 113) und $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ die Garbe der stetigen Funktionen auf X , die insbesondere eine feine Garbe ist. Außerdem sei $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^*$ die Garbe der stetigen Funktionen nach \mathbb{C}^* , also der nullstellenfreien stetigen Funktion auf X . Dann ist die kurze Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{f \mapsto e^{2\pi i f}} \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^* \longrightarrow 0$$

exakt. Für die von dieser induzierten langen exakten Sequenz der Cohomologiegruppen gilt

$$\underbrace{0 = H^1(X; \mathcal{C}_{\mathbb{C}})}_{\text{da } \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \text{ fein}} \longrightarrow \underbrace{H^1(X; \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^*)}_{\substack{\text{Isomorphismenklassen top.} \\ \text{komplexer Geradenbündel} \\ [L] \mapsto c_1(L) \text{ (Chern-Klasse)}}} \xrightarrow{\cong} H^2(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X; \mathcal{C}_{\mathbb{C}}) .$$

Ähnlich gilt, falls X eine glatte Mannigfaltigkeit ist,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathcal{E}_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f \mapsto e^{2\pi i f}} & \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^* \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow \text{Teilmenge} & & \uparrow \text{Teilmenge} \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathcal{C}_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^* \longrightarrow 0 \end{array}$$

und man erhält analog eine exakte Sequenz von Cohomologie-Gruppen. Dies liefert uns das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^1(X; \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^*) & \xrightarrow{\cong} & H^2(X; \mathbb{Z}) \\ \cong \downarrow ! & \circlearrowleft & \parallel \\ H^1(X; \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^*) & \xrightarrow{\cong} & H^2(X; \mathbb{Z}) \end{array}$$

d.h. zwei glatte Geradenbündel sind genau dann isomorph zueinander, wenn sie als topologische Geradenbündel isomorph zueinander sind.

Falls X eine orientierte, zusammenhängende, geschlossene (kompakte, unberandete), glatte 2-Mannigfaltigkeit ist, so ist die (im Seminar definierte) **Eulerzahl**

$$e : H^1(X; \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^*) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$$

ein Gruppenisomorphismus. Die Injektivität von e wurde im Seminar gezeigt, die Surjektivität ist einfach nachzuprüfen. Dass e schließlich einen Homomorphismus definiert, kann als Übungsaufgabe gezeigt werden. Außerdem gilt:

Falls X eine kompakt Riemannsche Fläche und $L \longrightarrow X$ ein holomorphes Geradenbündel ist, so gilt $e(L) = \text{deg}(L)$.

Literaturverzeichnis

- [FaK92] Farkas, H. M.; Kra, I.: „*Riemann Surfaces*“, Second Edition, Springer-Verlag, 1992.
- [For88] Forster, O.: „*Lectures on Riemann Surfaces*“, Springer-Verlag, 1981.
- [GrH78] Griffiths, P. A., Harris, J.: „*Principles of Algebraic Geometry*“, John Wiley & Sons Inc., 1978.
- [Gun66] Gunning, R. C.: „*Lectures on Riemann Surfaces*“, Princeton University Press, 1966.

Teil III.

Komplexe Geometrie

17. Der Satz von Riemann-Roch

17.1. Divisoren und Geradenbündel (Fortsetzung)

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Die abelsche Gruppe der Divisoren haben wir im letzten Semester durch

$$\text{Div}(X) := \{D : X \rightarrow \mathbb{Z} : D(x) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } x \in X\}$$

definiert. Wir definieren eine **partielle Ordnung auf der Menge der Divisoren**, wobei $D_1 \leq D_2$ sei, wenn für alle $x \in X$ gilt $D_1(x) \leq D_2(x)$. Für jede meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}^*(X)$ definieren wir (wie gehabt) mit (f) den Hauptdivisor, der durch $x \mapsto \text{ord}_x(f)$ entsteht.

Definition 1 (Holomorphe Funktionen mit Divisor-Ordnung): Für jeden Divisor $D \in \text{Div}(X)$ sei \mathcal{O}_D die Garbe der abelschen Gruppen, die jeder offenen Teilmenge $U \subset X$ die Menge

$$\mathcal{O}_D(U) := \{f \in \mathcal{M}(U) : \text{ord}_x(f) \geq -D(x) \text{ für alle } x \in U\}$$

zuordnet. Die Gruppenoperation sei hier durch die Addition von Funktionen gegeben.

Bemerkung: Die Wohldefiniertheit der Gruppenstruktur folgt aus der Definition der Ordnung. Falls f eine meromorphe Funktion auf $D_r(a) \subset \mathbb{C}$ ist, dann gilt $f \equiv 0$ genau dann, wenn $\text{ord}_a(f) = \infty$ ist. Ist

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

mit $b_k \neq 0$ die Laurent-Entwicklung der Funktion, dann gilt $\text{ord}_a(f) = k$. Trivialerweise folgt aus der Definition der Ordnung (vgl. Definition 26 auf Seite 79), dass $\text{ord}_a(-f) = \text{ord}_a(f)$ ist, und für die Summe zweier meromorpher Funktionen gilt

$$\text{ord}_a(f+g) \geq \min(\text{ord}_a(f), \text{ord}_a(g)) .$$

Also ist $\mathcal{O}_D(U)$ eine Gruppe bezüglich der Addition und damit die vorige Garbe wohldefiniert.

Wir formulieren nun den Isomorphismus $H^1(X; \mathcal{O}^*) \cong \text{Div}(X)/\text{Div}_H(X)$ aus Satz 197 von Seite 133 unter Berücksichtigung der Bijektion zwischen den Isomorphismenklassen holomorpher Geradenbündel und der Garben-Cohomologiegruppe $H^1(X; \mathcal{O}^*)$, siehe Satz 122 auf Seite 108, ein wenig um.

Satz 2: Für jedes $D \in \text{Div}(X)$ gibt es bis auf Isomorphismen genau ein holomorphes Geradenbündel $L_D \rightarrow X$, das einen meromorphen Schnitt $s \neq 0$ mit $(s) = D$ besitzt. Weiter ist jedes holomorphe Geradenbündel über X isomorph zum Bündel $L_D \rightarrow X$ für ein passendes D . \square

Den Schlüssel zwischen den holomorphen Schnitten \mathcal{O}_E von Vektorbündeln und den durch Divisoren bestimmten holomorphen Funktionen \mathcal{O}_D liefert der folgende Satz.

Satz 3: In der Notation des letzten Satzes definiert der Gruppenisomorphismus

$$h_U : \mathcal{O}_D(U) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{L_D}(U) \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{holomorphe Schnitte von } L_D \text{ über } U\} \quad f \mapsto f \cdot s$$

für alle offenen Teilmengen $U \subset X$ einen Garbenisomorphismus $h : \mathcal{O}_D \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{L_D}$.

Wie wir also sehen, ist die Garbe \mathcal{O}_D der Divisoren-bestimmten holomorphen Funktionen nichts neues, sodass wir unsere Ergebnisse und Sätze aus dem letzten Semester anwenden können.

Korollar 4: $H^p(X; \mathcal{O}_D)$ ist endlichdimensional für $p = 0, 1$ und Null für $p > 1$.

Mit dem Grad eines Divisors $\deg(D) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \in X} D(x)$ aus dem letzten Semester gelangen wir auch direkt zu einer Definition des **Grads eines holomorphen Geradenbündels** $L \rightarrow X$:

$$\deg(L) := \sum_{x \in X} \text{ord}_x(s) = \deg((s))$$

für einen meromorphen Schnitt $s \neq 0$. Dann folgt $\deg(L_D) = \deg(D)$.

Satz 5: 1. Falls $L \rightarrow X$ ein holomorphes Geradenbündel mit $\deg(L) < 0$ ist, so ist die unterste Cohomologiegruppe $H^0(X; \mathcal{O}_L) = \mathcal{O}(X, L) = 0$.

2. Dieses können wir auch mit Divisoren formulieren: Ist $D \in \text{Div}(X)$ ein Divisor vom Grad $\deg(D) < 0$, dann ist $H^0(X; \mathcal{O}_D) = 0$.

17.2. Wolkenkratzergerben

Definition 6 (Wolkenkratzergarbe): Sei X ein topologischer Raum, G eine abelsche Gruppe und $p \in X$ ein Punkt. Dann sei G_p die durch

$$U \mapsto G_p(U) := \begin{cases} G & : p \in U \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

definierte **Wolkenkratzergarbe**, wobei die einzelnen Halme die folgende Form haben:

$$(G_p)_x = \begin{cases} G & : x = p \\ 0 & : x \neq p \end{cases}$$

Nun müssen wir die Cohomologie dieser Wolkenkratzergerben studieren.

Satz 7: Für die Cohomologie der oben definierten Wolkenkratzergarbe gilt

$$H^p(X; G_p) = \begin{cases} G & : p = 0 \\ 0 & : p > 0 \end{cases} .$$

17.3. Das Theorem von Riemann und Roch

Nun kommen zu einem der wichtigsten Sätze über Riemannsche Flächen, dem Satz von Riemann-Roch.

17.3.1. Ein-Punkt-Divisoren

Sei X wieder eine kompakte Riemannsche Fläche. Für jeden Punkt $p \in X$ bezeichne D_p den zugehörigen Divisor mit

$$D_p(x) := \begin{cases} 1 & : x = p \\ 0 & : x \neq p \end{cases},$$

wobei man normalerweise nur kurz p statt D_p für diesen speziellen **Ein-Punkt-Divisor** schreibt. Bevor wir zum eigentlichen Beweis kommen, benötigen wir zuerst noch ein paar Hilfssätze.

Lemma 8: Für jeden Divisor $D \in \text{Div}(X)$ und jeden Punkt $p \in X$ gibt es eine lange exakte Garben-Cohomologie-Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X; \mathcal{O}_D) & \longrightarrow & H^0(X; \mathcal{O}_{D+p}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & & & \searrow & & \\ & & & & H^1(X; \mathcal{O}_D) & \longrightarrow & H^1(X; \mathcal{O}_{D+p}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Lemma 9: Falls $0 \longrightarrow A_0 \xrightarrow{\alpha_0} A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} A_n \longrightarrow 0$ eine lange exakte Sequenz von endlichdimensionalen Vektorräumen (über einem beliebigen Körper) ist, so gilt

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \dim A_j = 0.$$

17.3.2. Euler-Charakteristik und der Beweis des Satzes

Den Beweis des Riemann-Roch-Theorem führen wir nun elegant über die Definition der Euler-Charakteristik durch. Diese topologische Invariante wurde bereits im Differential-Topologie-Seminar eingeführt, wir werden sie nun unter einem anderen Gesichtspunkt und einer anderen Definition neu betrachten.

Definition 10 (Euler-Charakteristik): Die Euler-Charakteristik der Garbe \mathcal{O}_D ist durch

$$\chi(\mathcal{O}_D) := \dim H^0(X; \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X; \mathcal{O}_D)$$

definiert, sowie eine zugehörige **Invariante** durch $\varphi(D) := \chi(\mathcal{O}_D) - \deg(D)$.

Natürlich müssen wir noch zeigen, dass $\varphi(D)$ wirklich eine Invariante ist.

Lemma 11: $\varphi(D)$ ist unabhängig vom Divisor $D \in \text{Div}(X)$.

Die Frage ist nun, um was für eine Invariante es sich bei $\varphi(D)$ überhaupt handelt. Wegen der eben gezeigten Invarianz der Invariante $\varphi(D)$ von der Wahl des Divisors D betrachten wir einfach den Spezialfall $D = 0$ im folgenden Hilfssatz.

Lemma 12: Es gilt $\varphi(0) = 1 - g$ für $0 \in \text{Div}(X)$ als Null-Divisor.

Satz 13 (Riemann-Roch): Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und $D \in \text{Div}(X)$ ein Divisor. Dann gilt die Gleichheit

$$\dim H^0(X; \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X; \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg(D).$$

17.3.3. Alternative Formulierungen und die Verbindung zum Index

Bemerkung: Sei $L := L_D$ ein holomorphes Geradenbündel, dann definiere die Cohomologiegruppen $H^p(X; L) := H^p(X; \mathcal{O}(L))$, wobei $\mathcal{O}(L) = \mathcal{O}(L_D) = \mathcal{O}_D$ gilt. Mit den Isomorphismen der Dolbeault- (bzw. p -Formen-)Cohomologie (vgl. Definition 171 von Seite 124) und der Auflösung von Ω_E^p gilt

$$\begin{aligned} H^0(X; L) &\cong \ker(\bar{\partial} : \mathcal{E}^0(X, L) \longrightarrow \mathcal{E}^{0,1}(X, L)) \\ H^1(X, L) &\cong \operatorname{coker}(\bar{\partial} : \mathcal{E}^0(X, L) \longrightarrow \mathcal{E}^{0,1}(X, L)) \end{aligned}$$

Somit entspricht der **Index** gemäß der Definition $\operatorname{index}(d) := \dim \ker(d) - \dim \operatorname{coker}(d)$ für einen Differentialoperator d der Differenz der Dimensionen von $H^0(X; L)$ und $H^1(X; L)$.

Unter diesem Aspekt können wir den Satz von Riemann-Roch auch ein wenig umformulieren:

Satz 14 (Riemann-Roch): Es gilt $\operatorname{index}(\bar{\partial} : \mathcal{E}^0(X; L) \longrightarrow \mathcal{E}^{0,1}(X; L)) = 1 - g + \deg(L)$.

Der Satz von Riemann-Roch ist damit ein Spezialfall des wesentlich allgemeineren (und ungleich komplizierter zu beweisenden) Index-Satzes von Atiyah-Singer.¹

Satz 15: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und $a \in X$. Dann existiert eine nicht-konstante meromorphe Funktion f auf X , die in a einen Pol der Ordnung kleiner gleich $g + 1$ hat und außerhalb von a holomorph ist.

Bemerkung: Jede solche Funktion f kann als holomorphe Abbildung $X \longrightarrow \mathbb{C}\mathcal{P}^1$ aufgefasst werden und mit der Gradformel gilt $1 \leq \deg(f) = v_f(a) = -\operatorname{ord}_f(a) \leq g + 1$.

Korollar 16: Jede kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g = 0$ ist isomorph zu $\mathbb{C}\mathcal{P}^1$.

¹Auch wenn wir einige Objekte überhaupt nicht besprochen haben, soll der Index-Satz kurz zitiert werden:

Satz (Atiyah-Singer-Index-Theorem): Sei $D : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(F)$ ein elliptischer Differentialoperator zwischen zwei Vektorbündeln E und F über einer kompakten, orientierten, differenzierbaren Mannigfaltigkeit M . Dann gilt für den analytischen Index $\operatorname{index}(D) := \dim \ker(D) - \dim \operatorname{coker}(D)$ und dem topologischen Index $\gamma(D)$ die Gleichheit $\operatorname{index}(D) = \gamma(D)$.

18. Serre-Dualität

Wir wollen nun eine wichtige Dualität im Raum der glatten (p, q) -Differentialformen definieren, die sogenannte Serre-Dualität, welche das komplexe Gegenstück zur reellen Poincaré-Dualität darstellt.

18.1. Die Serre-Dualitätsabbildungen

Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit und $E \rightarrow X$ ein holomorphes Vektorbündel vom Rang r . Definiere eine Abbildung

$$\mathcal{E}^{p,q}(X; E) \times \mathcal{E}^{p',q'}(X; E^*) \longrightarrow \underbrace{\mathcal{E}^{p+p',q+q'}(X)}_{\mathcal{E}^{m,n}(X)} \quad (\varphi, \psi) \mapsto \varphi \wedge \psi ,$$

wobei E^* das **Dualbündel zu E** ist. Für Vektoren $v_1, \dots, v_{m+n} \in T_x X$ mit $m := p + q$ und $n := p' + q'$ können wir das Dachprodukt direkt gemäß der Definition durch

$$(\varphi \wedge \psi)(v_1, \dots, v_{m+n}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m!n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{m+n}} \text{sign}(\sigma) \underbrace{\langle \varphi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)}), \rangle}_{\in E_x} \underbrace{\langle \psi(v_{\sigma(m+1)}, \dots, v_{\sigma(m+n)}) \rangle}_{\in E_x^*}$$

angeben, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle : E_x \times E_x^* \rightarrow \mathbb{C}$ die **Dualitätsabbildung** zwischen dem Faser-Vektorraum E_x und Cofaser-Vektorraum E_x^* ist.

18.1.1. Lokale Beschreibung der Dualitätsabbildung

Wir wollen nun zu einer präziseren Beschreibung der oben angegebenen Abbildung gelangen. Dazu betrachten wir ihre lokale Beschreibung.

Sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge und s_1, \dots, s_r eine Basis holomorpher Schnitte von $E|_U$. Aus dieser Basis des Vektorbündels erhalten wir dann (wie in der linearen Algebra) eine duale Basis s_1^*, \dots, s_r^* von holomorphen Schnitten von $E^*|_U$, d.h. für alle Punkte $x \in U$ gilt

$$\underbrace{\langle s_i(x), \rangle}_{\in E_x} \underbrace{\langle s_k^*(x) \rangle}_{\in E_x^*} = \delta_{jk} := \begin{cases} 1 & : j = k \\ 0 & : j \neq k \end{cases} .$$

Bezüglich dieser Basis können wir dann jede Differentialform über U durch

$$\varphi = \sum_j \alpha_j \otimes s_j \quad \text{und} \quad \psi = \sum_k \beta_k \otimes s_k^*$$

darstellen, wobei $\alpha_j \in \mathcal{E}^{p,q}(U)$ und $\beta_j \in \mathcal{E}^{p',q'}(U)$ liegt. Für das Dachprodukt dieser beiden Differentialformen erhalten wir dann

$$(\varphi \wedge \psi)(v_1, \dots, v_{m+n}) = \sum_j (\alpha_j \wedge \beta_j)(v_1, \dots, v_{m+n}) ,$$

d.h. es gilt kurz $\varphi \wedge \psi = \sum_j \alpha_j \wedge \beta_j$ in völliger Analogie zur Analysis III.

Satz 17: Für alle glatten komplexen Differentialformen φ und ψ gilt

$$\bar{\partial}(\varphi \wedge \psi) = (\bar{\partial}\varphi) \wedge \psi + (-1)^m \varphi \wedge \bar{\partial}\psi,$$

wobei an Satz 170 auf Seite 124 zur Definition des Operator $\bar{\partial} : \mathcal{E}^{p,q}(X, E) \longrightarrow \mathcal{E}^{p,q+1}(X, E)$ erinnert sei.

18.1.2. Poincaré- und Serre-Dualität

Analog zur Konstruktion des Dolbeault-Doppelkomplexes auf Seite 121 und der Definition 163 der Dolbeault-Cohomologiegruppen zeigt man, dass in der Sequenz

$$\mathcal{E}^{p,0}(X, E) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{p,1}(X, E) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{p,2}(X, E) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots$$

die Abbildung $\bar{\partial}^2 = 0$ erfüllt. Folglich können wir die Cohomologiegruppen $H^{p,q}(X, E)$ definieren. Nun definiere eine Abbildung auf diesen Cohomologiegruppen durch

$$H^{p,q}(X, E) \times H^{p',q'}(X, E^*) \longrightarrow H^{p+p',q+q'}(X) \quad ([\varphi], [\psi]) \mapsto [\varphi \wedge \psi].$$

Die Wohldefiniertheit dieser Abbildung erhalten wir wie folgt: Seien φ und ψ zwei Cozykel, sodass $\bar{\partial}\varphi = 0$ und $\bar{\partial}\psi = 0$ gilt. Dann folgen durch Nachrechnen die drei Eigenschaften

1. $\bar{\partial}(\varphi \wedge \psi) = 0$,
2. $(\varphi + \bar{\partial}\omega) \wedge \psi = \varphi \wedge \psi + (\bar{\partial}\omega) \wedge \psi = \varphi \wedge \psi + \bar{\partial}(\omega \wedge \psi)$,
3. $\varphi \wedge (\psi + \bar{\partial}\omega) = \dots = \varphi \wedge \psi + (-1)^m \bar{\partial}(\varphi \wedge \omega)$,

und dies beweist die Wohldefiniertheit der Abbildung, da die Coränder gemäß der üblichen Konstruktion der Homologiegruppen herausgekürzt werden.

Definition 18 (Dualitätspaarung): Seien V und W zwei endlichdimensionale komplexe Vektorräume. Eine bilineare Abbildung $\beta : V \times W \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt **Dualitätspaarung**, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Abbildung $V \longrightarrow W^*$ mit $v \mapsto \beta(v, \cdot)$ ist ein Isomorphismus.
2. Die Abbildung $W \longrightarrow V^*$ mit $w \mapsto \beta(\cdot, w)$ ist ein Isomorphismus.

Mit den vorangegangenen Vorbereitungen lassen sich nun zwei Dualitätssätze formulieren, einer für den reellen und einer für den komplexen Fall, deren Beweise zum Teil aber den Rahmen der Vorlesungen sprengen.

Satz 19 (Poincaré-Dualität): Für jede geschlossene orientierte glatte n -Mannigfaltigkeit X und jedes p gelten die folgenden Aussagen (für die de Rham-Cohomologiegruppen):

1. Alle de Rham-Cohomologiegruppen $H_{\text{dR}}^p(X)$ sind endlichdimensional.
2. $H^p(X) \times H^{n-p}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $(\varphi, \psi) \mapsto \int_X \varphi \wedge \psi$ ist eine Dualitätspaarung.

Satz 20 (Serre-Dualität): Für jede n -dimensionale kompakte komplexe Mannigfaltigkeit X und jedes holomorphe Vektorbündel $E \longrightarrow X$ gelten für alle p und q die folgenden Aussagen:

1. Alle Dolbeault-Cohomologiegruppen $H^{p,q}(X, E)$ sind endlichdimensional.
2. $H^{p,q}(X, E) \times H^{n-p,n-q}(X, E^*) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $(\varphi, \psi) \mapsto \int_X \varphi \wedge \psi$ ist eine Dualitätspaarung.

18.2. Topologische Invarianz des Geschlechts

Wir wollen diese Dualitäten nun benutzen, um die topologische Invarianz des Geschlechts einer kompakten Riemannschen Fläche zu beweisen.

18.2.1. Betti- und Hodge-Zahlen und Anwendung der Serre-Dualität

Um die Notation von Dimensionen der betrachteten Cohomologiegruppen zu verkürzen, definieren wir die folgenden beiden Zahlen.

Definition 21 (Betti-Zahl): Falls X eine glatte geschlossene n -Mannigfaltigkeit ist, so definieren wir die **Betti-Zahl** $b_j := \dim H^j(X)$ als die Dimension der j -ten de Rham-Cohomologiegruppe.

Bemerkung: Zusammen mit der Poincaré-Dualität erfüllen die Betti-Zahlen die Symmetrieeigenschaft $b_{n-j} = b_j$.

Definition 22 (Hodge-Zahl): Falls analog X eine kompakte komplexe n -Mannigfaltigkeit und $E \rightarrow X$ ein holomorphes Vektorbündel ist, dann definiere die **Hodge-Zahl** $h^{p,q}(X, E) := \dim H^{p,q}(X, E)$ bzw. $h^{p,q}(X) := \dim H^{p,q}(X)$ für den Fall $E = X \times \mathbb{C}$.

Sei nun X eine kompakte Riemannsche Fläche, dann haben wir gemäß der Auflösung von Ω_E^p in Satz 172 von Seite 124 für $p, q = 0, 1$ den Dolbeault-Isomorphismus

$$H^{p,q}(X; E) \cong H^q(X; \Omega_E^p).$$

Insbesondere folgt daraus $H^1(X; \mathcal{O}) \cong H^{0,1}(X)$ für $p = 0$ und $E = X \times \mathbb{C}$ als triviales Geradenbündel, und damit erhalten wir für das Geschlecht

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \dim H^1(X; \mathcal{O}) \stackrel{\text{def}}{=} h^{0,1}(X) \stackrel{\text{Serre}}{=} h^{1,0}(X) \stackrel{\text{def}}{=} H^{1,0}(X) = \dim \Omega^1(X).$$

Satz 23: Für jede kompakte Riemannsche Fläche X gilt $d\mathcal{E}^1(X) = \bar{\partial}\mathcal{E}^{1,0}(X)$, also ist

$$H^{1,1}(X) = \mathcal{E}^2 / \bar{\partial}\mathcal{E}^{1,0} = \mathcal{E}^2 / d\mathcal{E}^1 = H^2(X; \mathbb{C}).$$

18.2.2. Beweis der Invarianz und Neuformulierung von Riemann-Roch

Damit können wir nun schließlich beweisen, dass das Geschlecht einer Mannigfaltigkeit invariant unter Homöomorphismen ist.

Satz 24 (Topologische Invarianz des Geschlechts): Für jede kompakte Riemannsche Fläche X gilt $b_1 = 2g$, also ist das Geschlecht g eine topologische Invariante.

Mit dieser Erkenntnis, dass das Geschlecht $g = \dim H^1(X; \mathcal{O}) = \dim H^0(X; \Omega)$ der Anzahl der linear unabhängigen 1-Formen auf einer Riemannschen Fläche entspricht, können wir eine weitere Formulierung des Satzes von Riemann-Roch finden.

Satz 25 (Riemann-Roch): Es gilt $h^0(L) - h^{0,1}(L) = 1 - g + \deg(L)$. □

18.3. Das kanonische Dualbündel des Tangentialbündels

Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und T^*X das **Dualbündel des Tangentialbündels** als komplexes Vektorbündel aufgefasst. Sei außerdem $E \rightarrow X$ ein holomorphes Vektorbündel auf X . Die Menge der holomorphen 1-Formen auf X mit Werten in E ist nach Definition durch

$$\Omega^1(X; E) \stackrel{\text{def}}{=} \ker(\bar{\partial} : \mathcal{E}^{1,0}(X, E) \rightarrow \mathcal{E}^{1,1}(X, E))$$

gegeben. Sind V und W zwei endlichdimensionale Vektorräume, dann gilt $\text{Hom}(V, W) = V^* \otimes W$, sodass wir mit $V := T_x X$ und $W := E_x$ dann

$$\mathcal{E}^{1,0}(X, E) = \mathcal{E}^0(X, T^*X \otimes E)$$

erhalten. Sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge der komplexen Mannigfaltigkeit, s_1, \dots, s_l eine Basis von Schnitten von $E|_U$ und z_1, \dots, z_n lokale Koordinaten auf U . Dann haben alle glatten 1,0-Formen auf U die Form

$$\mathcal{E}^{1,0}(U, E) = \left\{ \overbrace{\sum_{j,k} f_{jk} dz_j \otimes s_k}^{\varphi} : f_{jk} \in \mathcal{E}(U) \right\}$$

und die Anwendung des $\bar{\partial}$ -Operators liefert

$$\bar{\partial}\varphi = \sum_{j,k} \bar{\partial}(f_{jk} dz_j) \otimes s_k = \sum_{j,k} (\bar{\partial}f_{jk} \wedge dz_j) \otimes s_k .$$

Es gilt also $\bar{\partial}\varphi = 0$ genau dann, wenn für alle j und k gilt $\bar{\partial}f_{jk} = 0$, was genau dann der Fall ist, wenn φ ein holomorpher Schnitt des Bündels $T^*X \otimes E$ ist. Also erhalten wir

Korollar 26: *Es gilt $\Omega^1(X; E) = \Omega^0(X; T^*X \otimes E)$.* □

Wir kommen nun zu einer weiteren Formulierung des Satzes von Riemann-Roch.

Satz 27 (Riemann-Roch): *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $L \rightarrow X$ ein holomorphes Geradenbündel auf X . Wir führen als neue Notation ein, dass $K := T^*X$ das Cotangentialbündel von X ist - für Riemannsche Flächen ist dies wieder ein holomorphes Geradenbündel (es wird manchmal auch als **kanonisches Bündel** bezeichnet). Dann gilt*

$$h^0(L) - h^0(K \otimes L^*) = 1 - g + \text{deg}(L) .$$

Nun müssen wir uns um die Eigenschaften des neu eingeführten kanonischen Bündels kümmern.

Satz 28: *Auf jeder kompakten Riemannschen Fläche gilt $\text{deg}(K) = 2g - 2$.*

Satz 29: *Für jedes Gitter $T \subset \mathbb{C}$ hat der Torus \mathbb{C}/T das Geschlecht $g = 1$.*

18.4. Die Riemann-Hurwitz-Formel

Satz 30 (Riemann-Hurwitz): *Seien X und Y zwei kompakte Riemannsche Flächen und zwischen diesen $f : X \rightarrow Y$ eine holomorphe, nicht konstante Funktion. Dann gilt die Beziehung*

$$2g_X - 2 = \text{deg}(f) \cdot (2g_Y - 2) + \sum_{x \in X} (v_x(f) - 1) .$$

Bemerkung: Man nennt (aufgrund der naheliegenden Interpretation) den Summanden $v_x(f) - 1$ auch die **Verzweigungsordnung**.

Beispiel: 1. Wie wir im letzten Semester gesehen haben, erzeugt jedes komplexe irreduzible Polynom $P(x, y) := y^2 + x^m$ für $m \in \mathbb{N}$ ungerade eine zusammenhängende eindimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit $V := P^{-1}(0) \setminus \{(0, 0)\}$ von \mathbb{C}^2 .

$$\begin{array}{ccc} V & \subset & X_P \\ (x, y) \mapsto x \downarrow & & \downarrow F_1 \text{ holomorph} \\ \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\} & \subset & \mathbb{C}\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \end{array}$$

Für einen Punkt $p \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ gilt

$$|F_1^{-1}(p)| = \begin{cases} 1 & : p = 0, \infty \\ 2 & : \text{sonst} \end{cases},$$

und mit der eben bewiesenen Riemann-Hurwitz-Formel erhalten wir aus

$$2g(X_P) - 2 = 2 \cdot (2 \cdot 0 - 2) + 1 + 1 = -2 \iff g(X_P) = 0$$

nach Korollar 16 von Seite 141, dass sogar $X_P \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ ist.

2. Sei nun $P(x, y) = y^2 + (x - a_1) \cdots (x - a_n)$ für $n \geq 1$ das betrachtete Polynom für paarweise unterschiedliche a_1, \dots, a_n . Wir haben bereits gezeigt, dass $V := P^{-1}(0)$ eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{C}^2 ist. Die Verzweigungspunkte von $\pi : V \rightarrow \mathbb{C}$ mit $(x, y) \mapsto x$ sind die $(a_j, 0)$ für $1 \leq j \leq n$.

$$\begin{array}{ccc} V & \subset & X_P \\ \pi \downarrow & & \downarrow F_1 \\ \mathbb{C} & \subset & \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \end{array}$$

Betrachten wir die Urbilder von ∞ unter F_1 , so gilt für deren Anzahl

$$|F_1^{-1}(\infty)| = \begin{cases} 1 & : n \text{ ungerade} \\ 2 & : n \text{ gerade} \end{cases}.$$

Der Kürze halber definieren wir das Symbol ϵ , wobei $\epsilon = 1$ für n ungerade und $\epsilon = 0$ für n gerade gelten soll. Mit der Riemann-Hurwitz-Formel folgt nun

$$2g(X_P) - 2 = 2 \cdot (2 \cdot 0 - 2) + n + \epsilon = n + \epsilon - 4 \iff g(X_P) = \frac{n + \epsilon - 2}{2} = \left[\frac{n - 1}{2} \right],$$

wobei $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner gleich x ist.

Damit haben wir im vorigen Beispiel zugleich auch die folgende Aussage gezeigt.

Korollar 31: Für jedes $g \geq 0$ existiert eine hyperelliptische kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g . \square

18.5. Einbettungen in projektive Räume

Wir wollen uns nun einem anderen Gebiet der komplexen Geometrie widmen, nämlich den Einbettungen $X \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

18.5.1. Konstruktion der Einbettungsabbildung

Im Folgenden sei X stets eine kompakte Riemannsche Fläche, $L \rightarrow X$ ein holomorphes Geradenbündel und $K := T^*X$ wieder das kanonische Cotangentialbündel.

Lemma 32: Für $\deg L > \deg K$ verschwindet die erste Cohomologiegruppe der holomorphen Schnitte mit Werten in L , also $H^1(X; \mathcal{O}_L) = 0$.

Lemma 33: Gilt $\deg L > \deg K + 1$ für den Grad des Vektorbündels, dann gibt es für alle Punkte $p \in X$ einen Schnitt $s \in \mathcal{O}(L) = H^0(X; \mathcal{O}_L) = \Omega^0(X; L) = H^{0,0}(X; L)$ mit $s(p) \neq 0$.

Ist V ein $(N + 1)$ -dimensionaler komplexer Vektorraum, dann definieren wir den zugehörigen **komplexen projektiven Raum** durch

$$\mathbb{C}\mathcal{P}(V) := (V \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*,$$

dieser ist wieder eine N -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Jede Wahl einer Basis für V definiert dann einen Isomorphismus

$$\mathbb{C}\mathcal{P}(V) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}\mathcal{P}(\mathbb{C}^{N+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}\mathcal{P}^N.$$

Wir werden im Folgenden nun eine holomorphe Abbildung $\alpha : X \rightarrow \mathbb{C}\mathcal{P}(\mathcal{O}(L)^*)$ definieren, wenn $\deg L > \deg K + 1$ ist.

Sei $p \in X$ ein Punkt der komplexen Basisraum-Mannigfaltigkeit und $u : L_p \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$ ein linearer Isomorphismus. Sei $\alpha(p, u) \in \mathcal{O}(L)^*$ so gewählt, dass für $s \in \mathcal{O}(L)$ gilt $\alpha(p, u)s = u(s(p)) \in \mathbb{C}$. Nach dem vorigen Lemma 33 ist dann $\alpha(p, u) \neq 0$ und für $z \in \mathbb{C}^*$ gilt $\alpha(p, zu) = z\alpha(p, u)$. Also können wir die Funktion α durch

$$\alpha(p) := \text{Bild von } \alpha(p, u) \text{ in } \mathbb{C}\mathcal{P}(\mathcal{O}(L)^*)$$

definieren. Allerdings ist diese Definition praktisch kaum anwendbar, sodass wir zu einer konkreteren Beschreibungen gelangen wollen.

Jede Basis s_0, \dots, s_N holomorpher Schnitte von $\mathcal{O}(L)$ definiert einen Isomorphismus der Form $\varphi : \mathbb{C}\mathcal{P}(\mathcal{O}(L)^*) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}\mathcal{P}^N$ und es gilt

$$\varphi(\alpha(p)) = [u(s_0(p)), \dots, u(s_N(p))] \in \mathbb{C}\mathcal{P}^N.$$

Aus dieser Darstellung wird sofort klar, dass α holomorph ist, da wir u mithilfe einer lokalen Trivialisierung von L definieren können (die nach Definition gerade holomorph sein muss).

18.5.2. Kriterien für die Einbettungseigenschaft

Als nächste Frage stellt sich nun, wann die Abbildung α eine Einbettung ist, wir suchen also nach den notwendigen Voraussetzungen.

Definition 34 (Direkte Garben-Summe): Sind \mathcal{F}, \mathcal{G} zwei Garben über X , dann ist die **direkte Summe** $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ eine neue Garbe, die durch

$$U \mapsto (\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(U) := \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$$

definiert ist.

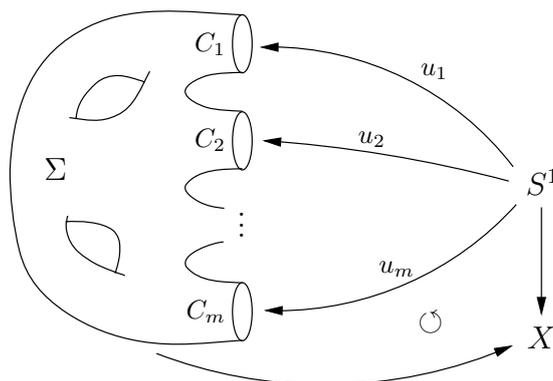


Abbildung 18.1.: Darstellung der in Satz 37 beschriebenen Mannigfaltigkeit und der Abbildungen.

Satz 35: Falls $\text{deg } L > \text{deg } K + 2$ gilt, dann ist die Abbildung $\alpha : X \hookrightarrow \mathbb{C}P(\mathcal{O}(L)^*)$ eine Einbettung.

Bemerkung: Falls $\text{deg } L > \text{deg } K$ ist, so gilt nach dem Satz von Riemann-Roch zunächst die Identität $\dim \mathcal{O}(L) = 1 - g + \text{deg } L$.

Bemerkung: Wähle L mit $\text{deg } L = \text{deg } K + 3$, dann gilt die Gleichung

$$\dim \mathcal{O}(L) = h^0(L) - \underbrace{h^0(K \otimes L^*)}_{0, \text{ da trivial}} = 1 - g + \text{deg } L = 1 - g + (2g - 2) + 3 = g + 2 .$$

Es folgt $N := h^0(L) - 1 = g + 1$, dies ist die kleinste Dimension, die wir (mit dem vorigen Satz) erreichen können.

Korollar 36: Es existiert eine Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{C}P^{g+1}$. □

Bemerkung: Es existiert immer eine Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{C}P^3$, aber nicht immer in $\mathbb{C}P^2$. Dies werden wir später genauer untersuchen.

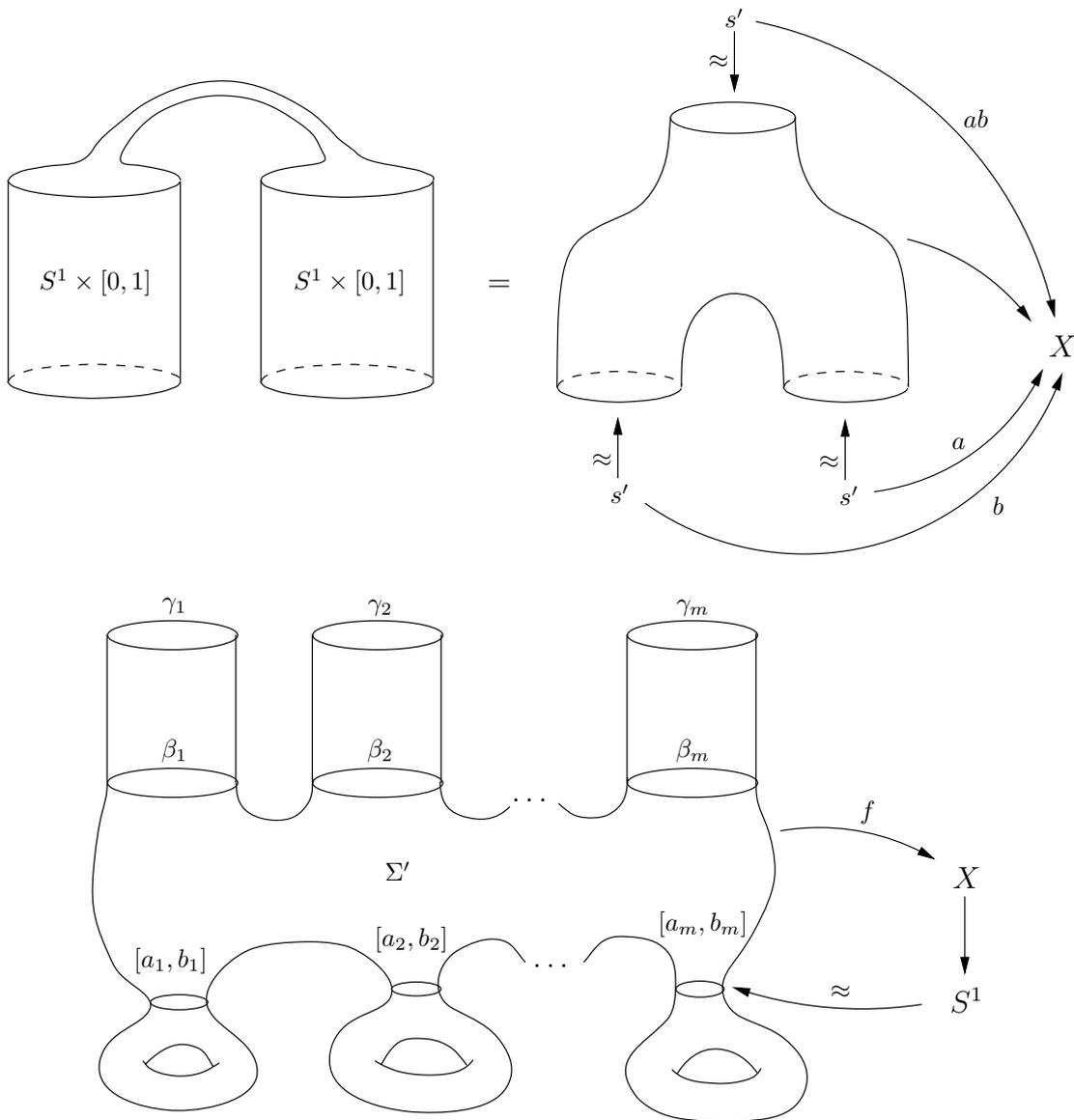
18.6. Tori und das Geschlecht Eins

Als nächstes Ziel wollen wir nun zeigen, dass für $g(X) = 1$ stets folgt, dass X zu einem Torus isomorph ist. Dazu benötigen erst eine kleine Digression.

Satz 37: Sei X eine glatte, zusammenhängende Mannigfaltigkeit und $\gamma_1, \dots, \gamma_m : S^1 \rightarrow X$ glatte Abbildungen mit $\sum_{j=1}^m [\gamma_j] = 0$ in $H_1(X; \mathbb{Z})$. Dann existiert eine glatte, kompakte, orientierte, zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeit Σ mit $\partial\Sigma = \coprod_{j=1}^m C_j$, orientierungserhaltende Diffeomorphismen $u_j : S^1 \xrightarrow{\cong} C_j$ und eine glatte Abbildung $f : \Sigma \rightarrow X$ mit $f \circ u_j = \gamma_j$ für alle $j = 1, \dots, m$.

Sei $\gamma_j : S^1 \rightarrow X$ wie im vorigen Satz. Wähle einen Basispunkt $x_0 \in X$ und ein stetiges $\beta_j : S^1 \rightarrow X$ mit $\beta_j(1) = x_0$, sodass $\beta_j \sim \gamma_j$ stetig homotop gilt. Dann gilt für die Fundamentalgruppe

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 := \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\quad} & H_1(X; \mathbb{Z}) , \\ & \searrow & \uparrow \cong \\ & & \pi_1 / [\pi_1, \pi_1] \end{array}$$



also gibt es stetige Abbildungen $a_k, b_k : S^1 \rightarrow X$ für $k = 1, \dots, n$, sodass

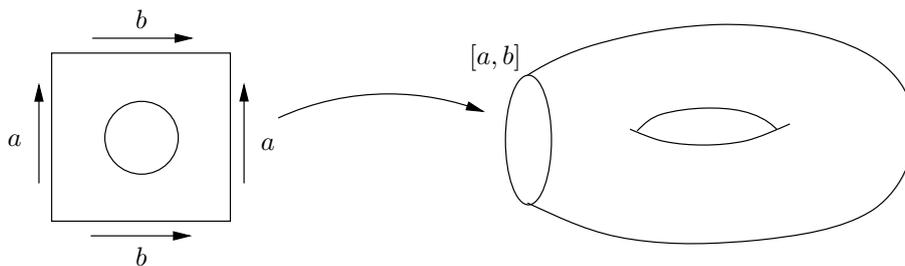
$$\beta_1 \cdots \beta_m \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$$

ist, wobei $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ ein Kommutator ist.

Satz 38: Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit. Falls $\gamma : S^1 \rightarrow X$ eine Abbildung und $\varphi \in \mathcal{E}^1(X)$ mit $d\varphi = 0$ eine geschlossene 1-Form ist, so hängt das Integral $\oint_{\gamma} \varphi$ nur von den (Co-)Homologieklassen $[\gamma] \in H_1(X; \mathbb{Z})$ und $[\varphi] \in H_{\text{dR}}^1(X)$ ab. Die entsprechende Paarung

$$H_1(X; \mathbb{Z}) \times H_{\text{dR}}^1(X) \rightarrow \mathbb{R} \quad ([\gamma], [\varphi]) \mapsto \oint_{\gamma} \varphi$$

ist biadditiv.



Lemma 39: Sei X eine kompakte, zusammenhängende, komplexe Mannigfaltigkeit und $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ eine glatte komplexwertige Funktion mit $\bar{\partial}\partial f = 0$ ist. Dann ist f konstant.

Satz 40: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann ist die Abbildung

$$I : H_1(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \Omega^1(X)^* \quad [\gamma] \mapsto \oint_{\gamma} \dots$$

ein Isomorphismus auf ein Gitter $\Gamma \subset \Omega^1(X)^* \cong \mathbb{C}^g$ für g als Geschlecht. Insbesondere gilt: Falls $\omega_1, \dots, \omega_g$ eine Basis von $\Omega^1(X)$ ist, so bilden die Vektoren

$$\left(\oint_{\gamma} \omega_1, \dots, \oint_{\gamma} \omega_g \right) \in \mathbb{C}^g$$

für $\gamma : S^1 \rightarrow X$ ein Gitter in X .

Satz 41: Jede kompakte Riemannsche Fläche X vom Geschlecht $g = 1$ ist isomorph zu einem Torus \mathbb{C}/Γ .

18.7. Weierstraßpunkte und Automorphismengruppen

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g . Eine berechtigte Frage ist, ob die Automorphismengruppe $\text{Aut}(X)$ von X transitiv wirkt. Für $g = 0$ ist $X \cong \mathbb{C}\mathcal{P}^1$ und es gilt

$$\text{Aut}(\mathbb{C}\mathcal{P}^1) = \{\text{Möbius-Transformationen}\} = \text{PSL}_2(\mathbb{C}) := \text{SL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^*,$$

die transitiv auf $\mathbb{C}\mathcal{P}^1$ wirkt - dies haben wir im zweiten Unterpunkt von Satz 178 von Seite 61 bewiesen. Für $g = 1$ ist nach dem letzten Satz $X \cong \mathbb{C}/\Gamma$ und $\text{Aut}(\mathbb{C}/\Gamma) \cong \mathbb{C}/\Gamma$ wirkt durch Translation transitiv.

Wähle einen Punkt $p \in X$ und definiere $V_n := \{\omega \in \Omega^1(X) : \text{ord}_p(\omega) \geq n\}$. Dann entspricht $V_0 = \Omega^1(X)$ und es gilt wie gehabt $\dim \Omega^1(X) = g$. Betrachte die Sequenz

$$0 \longrightarrow V_n \longrightarrow V_{n-1} \xrightarrow{\beta} \mathbb{C} .$$

Lokal lässt sich mit der Taylor-Entwicklung um den Punkt p die Funktion β von der Menge der holomorphen 1-Formen mit einer Ordnung größer gleich $n - 1$ in p nach \mathbb{C} durch

$$\beta \left(\sum_{k \geq n-1} a_k z^k \right) := a_{n-1}$$

definieren. Dann ist $\dim(V_{n-1}/V_n) = \dim\{\omega \in \Omega^1(X) : \text{ord}_p(\omega) = n - 1\} = 0$ oder 1 .

Definition 42 (Loch): Der Wert $n \geq 1$ heißt **Loch**, wenn $\dim(V_{n-1}/V_n) = 1$ gilt, d.h. wenn es holomorphe 1-Formen $\omega \in \Omega^1(X)$ mit $\text{ord}_p(\omega) = n - 1$ gibt.

Es stellt sich jetzt die Frage, wieviele Löcher es gibt und welche Eigenschaften diese haben. Für alle ω liegt $\omega \notin V_n$ für $n > \text{ord}_p(\omega)$, d.h. es folgt $\bigcap_n V_n = \{0\}$. Wegen $\dim V_0 = \dim \Omega^1(X) = g$ existieren dann genau g Löcher $n_1 < n_2 < \dots < n_g$.

Sei nun ω_0 eine meromorphe 1-Form auf X verschieden von Null. Mit $D_0 := (\omega_0) \in \text{Div}(X)$ sei der Hauptdivisor dieser 1-Form bezeichnet. Definiere dann einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}_{D_0-np}(X) \xrightarrow{\cong} V_n \quad f \mapsto \cdot f \omega_0$$

und setze $W_n := \mathcal{O}_{np}(X) = \{f \in \mathcal{M}(X) : f \text{ holomorph außerhalb von } p, \text{ord}_p(f) \geq -n\}$. Für die Dimension dieses Raumes gilt

$$\begin{aligned} \dim W_n &= \dim H^0(X; \mathcal{O}_{np}) \stackrel{\text{Satz 13}}{=} 1 - g + \deg(\widehat{np}) + \dim H^0(X; \mathcal{O}_{D_0-np}) \\ &= 1 - g + n + \dim V_n, \end{aligned}$$

also folgt $\dim(W_n/W_{n-1}) = 1 - \dim(V_{n-1}/V_n)$. Damit ist n ein Loch genau dann, wenn die Gleichheit $W_n = W_{n-1}$ gilt. Da die Bedingung wegen $W_n \supset W_{n-1}$ schwächer wird, ist dies äquivalent dazu, dass keine meromorphen Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ existieren, die holomorph außerhalb des Punkts p sind und $\text{ord}_p(f) = -n$ haben.

Definition 43 (Nicht-Löcher-Semigruppe): Sei $\Gamma_p := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist kein Loch}\}$ die **additive Semigruppe der Nicht-Löcher**. Die Semigruppeneigenschaft folgt, da für $m, n \in \Gamma_p$ auch $m + n \in \Gamma_p$ liegt.

Satz 44: 1. Es ist $\dim W_{g+1} > 1$, d.h. es existiert eine nicht-konstante meromorphe Funktion auf X , die im Punkt p einen Pol der Ordnung höchstens $g + 1$ hat und außerhalb von p holomorph ist.

2. Falls $g \neq 0$ ist, so gilt $1 = n_1 < n_2 < \dots < n_g \leq 2g - 1$.

Bemerkung: Falls $X = \mathbb{C}P^1$ und $n \geq 0$ ist, so bildet $\{1, z^{-1}, \dots, z^{-n}\}$ eine Basis von W_n wenn der Punkt $p = 0$ ist.

Sofern nicht anders vermerkt sei von jetzt ab das Geschlecht $g > 0$. Insbesondere gilt nach dem vorigen Satz die Ungleichung $n_j \geq j$.

Definition 45 (Weierstraß-Gewicht/-Punkt): Das **Weierstraß-Gewicht** von p ist durch

$$w(p) := \sum_{j=1}^g (n_j - j) \geq 0$$

definiert. Der Punkt p heißt **Weierstraß-Punkt**, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

1. Es ist $w(p) > 0$.
2. Es gilt $V_g \neq 0$.
3. Es ist $W_g \neq W_0 = \{\text{konstante Funktionen}\}$, d.h. es gibt eine nicht-konstante meromorphe Funktion auf X , die im Punkt p einen Pol der Ordnung höchstens g hat und außerhalb von p holomorph ist.

Bemerkung: Im Fall $g = 1$ gibt es nur ein Loch und es finden sich keine Weierstraß-Punkte.

18.7.1. Digression: Wronski-Determinanten

Definition 46 (Wronski-Determinante): Falls f_1, \dots, f_n holomorphe Funktionen auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ sind, so ist die **Wronski-Determinante** definiert durch

$$W(f_1, \dots, f_n) := \det (f_j^{(k)})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 0 \leq k \leq n-1}} = \det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Satz 47: Für Funktionen $\varphi, f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(U)$ erfüllt die Wronski-Determinante die Gleichheit

$$W(\varphi f_1, \dots, \varphi f_n) = \varphi^n W(f_1, \dots, f_n).$$

Satz 48: Falls $U \subset \mathbb{C}$ eine offene, zusammenhängende Teilmenge ist und $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(U)$ holomorphe Funktionen auf U , dann sind diese f_1, \dots, f_n genau dann linear abhängig, wenn die Wronski-Determinante $W(f_1, \dots, f_n) = 0$ ist.

Satz 49 (Ordnung der Wronski-Determinante): Seien $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(U)$ Funktionen auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ mit $0 \in U$. Mit $m_j := \text{ord}_0(f_j)$ seien die Ordnungen der Funktionen im Nullpunkt bezeichnet, wobei $m_1 < m_2 < \dots < m_n$ gelte. Außerdem sei $W := W(f_1, \dots, f_n)$, dann gilt

$$\text{ord}_0(W) = \sum_{j=1}^n (m_j + 1 - j).$$

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$ und $\omega_1, \dots, \omega_g$ eine Basis von $\Omega^1(X)$. Außerdem sei (U, φ) eine Karte für eine offene Teilmenge $U \subset X$, d.h. wir betrachten eine Abbildung $\varphi : U \subset X \xrightarrow{\cong} U' \subset \mathbb{C}$. Mit dem Pullback der Karte erhalten wir dann

$$(\varphi^{-1})^* \omega_j = f_j dz$$

für holomorphe Funktionen $f_j \in \mathcal{O}(U')$. Wir wissen bereits, dass der Punkt $p \in U$ genau dann ein Weierstraßpunkt ist, wenn $V_g(p) \neq 0$ ist (vgl. Definition 45), d.h. wenn eine holomorphe 1-Form $\omega \in \Omega^1(X)$ mit $\omega \neq 0$ und $\text{ord}_p(\omega) \geq g$ existiert. Bezüglich der gewählten $\Omega^1(X)$ -Basis ist dies wegen der Diffeomorphismen-Invarianz der Ordnung äquivalent zur Existenz von $(a_1, \dots, a_g) \in \mathbb{C}^g \setminus \{0\}$ mit

$$\text{ord}_{\varphi(p)} \left(\sum_{j=1}^g a_j f_j \right) \geq g \iff \sum_{j=1}^g a_j f_j^{(k)}(\varphi(p)) = 0$$

für $k = 0, \dots, g-1$, was genau dann der Fall ist, wenn die Vektoren $(f_j(\varphi(p)), \dots, f_j^{(g-1)}(\varphi(p)))$ für $j = 1, \dots, g$ linear abhängig sind. Dies ist aber nach dem vorletzten Satz genau dann der Fall, wenn die Wronski-Determinante $W(f_1, \dots, f_g) = 0$ in $\varphi(p)$ ist.

Satz 50: Sei $N := 1 + \dots + g = \frac{1}{2}g(g+1)$. Dann existiert ein holomorpher Schnitt $s \neq 0$ von $K^{\otimes N} := K \otimes \dots \otimes K$ (N -faches Tensorprodukt mit sich selbst) mit der folgenden Charakterisierung: Seien (U, φ) , ω_j und f_j wie zuvor gewählt, dann ist der Schnitt lokal über U durch

$$s|_U = \varphi^* (W(f_1, \dots, f_g) \underbrace{dz \otimes \dots \otimes dz}_{N \text{ Mal}})$$

definiert. Die Weierstraßpunkte von X sind also genau die Nullstellen des Schnitts s und es gibt nur endlich viele Weierstraßpunkte.

Bemerkung: Der Schnitt s ist bis auf eine Konstante unabhängig von $\omega_1, \dots, \omega_g$.

Satz 51: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und s der im vorigen Satz definierte Schnitt von $K^{\otimes N}$ für $N = \frac{1}{2}g(g+1)$. Dann gilt $\text{ord}_p(s) = w(p)$ für alle Punkte $p \in X$, also folgt

$$\sum_{p \in X} w(p) = \sum_{p \in X} \text{ord}_p(s) = \deg(K^{\otimes N}) = N \deg K = \frac{1}{2}g(g+1)(2g-2) = (g-1)g(g+1).$$

für die Summe aller Weierstraßpunkte einer kompakten Riemannsche Fläche vom Geschlecht g .

Korollar 52: Ist das Geschlecht der Riemannschen Fläche $g = 2$, dann ist X hyperelliptisch, d.h. es existiert eine holomorphe Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{C}P^1$ vom Grad 2 (vgl. Seite 92).

Definition 53 (Normaler Weierstraßpunkt): Ein Weierstraßpunkt $p \in X$ heißt **normal** wenn $w(p) = 1$ gilt, d.h. der Schnitt s ist in p transversal zum Nullschnitt des N -fachen Tensorprodukts des kanonischen Bündels $K^{\otimes N}$. Wegen $1 = w(p) = \sum_{i=1}^g (n_i - j)$ ist dies der Fall wenn die Löcher $1, 2, \dots, g-1, g+1$ sind.

Definition 54 (Normale Riemannsche Fläche): Die kompakte Riemannsche Fläche X heißt **normal**, wenn alle Weierstraßpunkte normal sind, d.h. wenn s transversal zum Nullschnitt ist. In diesem Fall gibt nach Satz 51 genau $(g-1)g(g+1)$ Weierstraßpunkte.

Sei $p \in X$ ein Punkt und $\Gamma_p \subset \mathbb{N}$ die Semigruppe der Nicht-Löcher. Es sei $r := \min \Gamma_p \geq 2$ der kleinste Wert, der kein Loch ist. Dann folgt für ein Loch $n \notin \Gamma_p$ und $n > r$ direkt $n - r \notin \Gamma_p$. Deswegen bilden die Löcher endliche arithmetische Folgen $i, i+r, i+2r, \dots, i+\lambda_i r$, wobei $1 \leq i \leq r-1$ und $\lambda_i \geq 0$ gilt. Jedes Loch kommt in genau einer solchen Folge vor.

Definition 55 (Hyperelliptischer Weierstraßpunkt): Ein Weierstraßpunkt $p \in X$ heißt **hyperelliptisch** wenn der kleinste Wert, der kein Loch darstellt, $r = 2$ ist.

In diesem Fall sind die Löcher $1, 3, 5, \dots, 2g-1$ weil es genau g Weierstraßpunkte gibt.

$$w(p) = \sum_{j=1}^g [(2j-1) - g] = \sum_{j=1}^g (j-1) = 1 + 2 + \dots + (g-1) = \frac{1}{2}g(g-1).$$

Bemerkung: Falls X einen hyperelliptischen Weierstraßpunkt besitzt, so existiert eine meromorphe Funktion f mit $\text{ord}_p(f) = -2$, die holomorph außerhalb von p ist. Eine solche Funktion f definiert eine holomorphe Abbildung $X \rightarrow \mathbb{C}P^1$ vom Grad 2, also ist f hyperelliptisch.

Satz 56: Für jeden Weierstraßpunkt $p \in X$ gilt $1 \leq w(p) \leq \frac{1}{2}g(g-1)$, d.h. wir können das Weierstraß-Gewicht auch nach oben hin eingrenzen. Außerdem gilt

$$w(p) = 1 \iff p \text{ normal} \quad \text{und} \quad w(p) = \frac{1}{2}g(g-1) \iff p \text{ hyperelliptisch}.$$

Satz 57: Wenn X keine hyperelliptische Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g > 1$ ist, dann erhalten wir durch

$$2g+2 < \mu := \#\{\text{Weierstraßpunkte von } X\} \leq (g-1)g(g+1)$$

eine Abschätzung der Anzahl der Weierstraßpunkte.

Satz 58: Falls $f : X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ eine holomorphe Abbildung vom Grad 2 ist, so hat f genau $2g + 2$ Verzweigungspunkte. Wenn $g > 1$ gilt, so sind die Verzweigungspunkte genau die Weierstraßpunkte, und diese sind alle hyperelliptisch.

Satz 59: Falls die Riemannsche Fläche X hyperelliptisch und vom Geschlecht $g \geq 2$ ist, so ist die Grad-2-Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ eindeutig bis auf Automorphismen von $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ (also lineare bzw. Möbius-Transformationen) bestimmt. Folglich ist die hyperelliptische Involution von X eindeutig bestimmt.

Satz 60: Auf einer hyperelliptischen Fläche X vom Geschlecht $g > 1$ existiert ein Automorphismus $\phi \neq \text{Id}$ mit mindestens 5 Fixpunkten, nämlich die hyperelliptische Involution ι .

Satz 61: Falls $g(X) \geq 1$ ist, so hat jeder Automorphismus $\phi \neq \text{Id}$ von X höchstens $2g + 2$ Fixpunkte.

Bemerkung: Dasselbe Ergebnis erhält man auch für eine Sphäre $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, d.h für Riemannsche Flächen vom Geschlecht $g = 0$.

Satz 62 (Schwarz): Eine kompakte Riemannsche Fläche X vom Geschlecht $g > 1$ hat nur endlich viele Automorphismen.

Bemerkung: Es gilt nach einem Satz von Hurwitz sogar $|\text{Aut}(X)| \leq 84(g - 1)$, siehe dazu das Buch „*Quelques Aspects des Surfaces de Riemann*“ von REYSSAT.

Definition 63 (Reguläres Polynom): Ein Polynom $P(x, y, z)$ heißt **regulär**, wenn 0 ein regulärer Wert von $P|_{\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}}$ ist.

Satz 64: Sei $P(x, y, z)$ ein homogenes reguläres Polynom vom Grad $d \geq 1$. Dann ist $X := \text{loc } P \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht

$$g = \frac{1}{2}(d - 1)(d - 2) .$$

18.8. Die Picard-Gruppe

Definition 65: Für jede komplexe Mannigfaltigkeit X definiere die **Picard-Gruppe** durch

$$\text{Pic}(X) = \{ \text{Isomorphismusklassen holomorpher Geradenbündel auf } X \} .$$

Bezüglich des Tensorprodukts \otimes für Vektorbündel ist $\text{Pic}(X)$ eine abelsche Gruppe.

Im letzten Semester haben wir bereits gezeigt, dass $\text{Pic}(X) \cong H^1(X; \mathcal{O}^*)$ kanonische isomorph sind. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, dann betrachte

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(X) & \xrightarrow[\cong]{\text{div}} & \text{Div}(X) / \text{Div}_H(X) \\ & \searrow^{\text{deg}} & \downarrow^{\text{deg}} \\ & & \mathbb{Z} \end{array}$$

Definiere nun die beiden Mengen

$$\begin{aligned} \text{Div}_0(X) &:= \{ D \in \text{Div}(X) : \text{deg}(D) = 0 \} & \text{und} \\ \text{Pic}_0(X) &:= \{ [L] \in \text{Pic}(X) : \text{deg}(L) = 0 \} \end{aligned}$$

so gilt folglich $\text{Pic}_0(X) \xrightarrow{\cong} \text{Div}_0(X)/\text{Div}_H(X)$ und die kurze Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{Pic}_0(X) \longrightarrow \text{Pic}(X) \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

exakt und somit gilt folglich $\text{Pic}(X) \cong \text{Pic}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.

Lemma 66: Für jede kompakte komplexe zusammenhängende Mannigfaltigkeit X ist

$$i : \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} H^0(X; \mathcal{O}/\mathbb{R})$$

ein Isomorphismus reeller Vektorräume, wobei \mathbb{R} hier die konstante Garbe meint.

Literaturverzeichnis

- [BHP04] Barth, W. P.; Hulek, K.; Peters, C. A. M.; Ven, A. V. d.: „*Compact Complex Surfaces*“, Second Enlarged Edition, Springer-Verlag, 2003.
- [Dem98] Demailly, J.-P.: „*Analytic and Algebraic Geometry*“, Springer-Verlag, 1998.
- [FaK92] Farkas, H. M.; Kra, I.: „*Riemann Surfaces*“, Second Edition, Springer-Verlag, 1992.
- [For88] Forster, O.: „*Lectures on Riemann Surfaces*“, Springer-Verlag, 1981.
- [GrH78] Griffiths, P. A., Harris, J.: „*Principles of Algebraic Geometry*“, John Wiley & Sons Inc., 1978.
- [Gun66] Gunning, R. C.: „*Lectures on Riemann Surfaces*“, Princeton University Press, 1966.
- [Huy05] Huybrechts, D.: „*Complex Geometry*“, Springer-Verlag, 2005.

Index

- p -Formen-Cohomologie, 124
- w -Stelle, 53
- Überdeckungs-Verfeinerung, 103
- Überlagerung, 76
- Überlagerungssatz, 87
- Étale-Raum, 97
- Čech-Cohomologie, 103
- Čech-Cokette, 102

- abgeschlossene Teilmenge, 4
- Abschluss der komplexen Zahlen, 51
 - holomorph, 60
 - offene Teilmenge, 57
 - Topologie, 57
- absolut konvergent, 9
- Addition, 2
- Additionstheoreme, 11
- Affine Varietät/Locus, 85
- Algebraisch über K , 83
- Algebraische Menge, 94
- Allgemeiner Cauchy-Integralsatz, 36
- Allgemeines Maximums-Prinzip, 26
- analytisch, 4
- Anti-linear, 119
- Argument
 - einer komplexen Zahl, 3
- Arzela-Ascoli, 62
- Assoziativität, 2
- Atiyah-Singer-Index-Theorem, 141
- Auflösung, 116
- Auflösung holomorpher p -Formen, 124
- Auflösung holomorpher Formen, 122
- Auflösung holomorpher Funktionen, 118
- Automorphismengruppe, 61
- Azyklische Garbe, 116

- Bernouilli-Zahlen, 49
- Besselsche Ungleichung, 125
- Betrag, 2
- Betti-Zahl, 144
- Biholomorph, 74
- biholomorph, 46, 61

- Casorati-Weierstraß, 30
- Cauchy-Integralformel, 21
- Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen, 6
- Cauchy-Ungleichung, 25
- Cokettenabbildung, 109
- Cokettenkomplex, 109

- de Rham-Cohomologie, 117
- Decktransformation, 86
- dicht, 28
- Differentialoperatoren, 121
- Differenzierbarkeit
 - analytisch, 4
 - Cauchy-Riemann-Kriterium, 6
 - Gesetze, 5
 - holomorph, 4
 - komplexe, 4
 - reell differenzierbar, 5
- Direkte Garben-Summe, 147
- Dirichlet-Reihe, 49
- diskret, 24
- Diskriminante, 55, 85
- Distributivität, 2
- Divisor, 102
- Dolbeault-Cohomologie, 121
- Dolbeault-Lemma, 118
- Doppelreihe, 31
 - gleichmäßig konvergente, 31
 - konvergente, 31
- Doppelverhältnis, 59
- Drehstreckung, 3
- Dreiecke, 15
- Dualitätspaarung, 143

- Ehresmannscher Faserungssatz, 95
- Eigentliche Abbildung, 77
- Eindeutigkeit, 59
- einfach geschlossen, 35
- einfach zusammenhängend, 18
- Elementarsymmetrische Funktion, 81
- Eliminationssatz, 95
- elliptische Funktion, 52
 - Weierstraßsche, 53
- Erster Endlichkeitssatz, 129
- Euler-Charakteristik, 140
- Eulersche Identität, 10
- Exakte Garbenhomomorphismen-Sequenz, 100
- Exakte Sequenz, 99
- Existenz, 59

- Familie von Funktionen, 62
 - gleichgradig stetig, 62
- Feine Garbe, 114
- Fixpunkte, 59
- Form elliptischer Funktionen, 55
- Fundamentalsatz der Algebra, 27
- Funktionsfolge, 8
 - lokal beschränkte, 62
 - lokal gleichmäßig konvergent, 47

- ganze Funktion, 26
- ganze transzendente Funktion, 26
- Garbe, 96
- Garben-Kern und -Bild, 100
- Garben-Schnitt-Abbildung, 99
- Garbencohomologie, 105
- Gaußsche Zahlenebene, 2
- Gebiet, 7
- Gebietstreue, 25, 45
- Gerichtete Menge, 104
- Gerichtetes System, 104
- Geschlecht, 118
- geschlossener Integrationsweg
 - nullhomolog, 36
 - nullhomotop, 36

- geschlossener Weg, 15
- Geschwindigkeitsvektor, 13
- Gesetze der Differentiation, 5
- Gitter, 52
- Glatte p, q -Formen im Vektorbündel, 123
- Glatte Zerlegung der Eins, 115
- gleichgradig stetig, 62
- gleichmäßig konvergent, 8
- Goursat, 16
- Grad, 134
- Graduierte Gruppe, 109
- Green, 16
- Großer Picardscher Satz, 30
- Gruppe der Selbstabbildungen, 61

- Häufungspunkt, 24
- Halme, 97
- harmonisch konjugierte Funktion, 64
- harmonische Funktion, 64
- Hauptideal, 91
- Hauptteil einer Funktion, 30
- Hauptwert eines Integrals, 41
- Hauptzweig des Logarithmus, 19
- hebbare Singularität, 29
 - im Unendlichen, 32
- Hilbertraum, 124
- Hodge-Zahl, 144
- holomorph, 4
 - diskrete Nullstellen-Menge, 23
- Holomorph zwischen Mannigfaltigkeiten, 72
- Holomorphe p -Formen, 121
- Holomorphe Funktionen mit Divisor-Ordnung, 138
- Holomorphe/Meromorphe Funktionenmenge, 81
- Holomorpher Atlas, 71
- Holomorphes Vektorbündel, 106
- Homogene Form, 91
- Homotopie
 - von Wegen, 17
- Hyperelliptisch, 92
- Hyperelliptischer Weierstraßpunkt, 153

- Identitätssatz, 24, 76
- Imaginärteil, 2
- Induktiver Limes, 104
- Integrationsweg, 12
 - einfach geschlossen, 35
 - entgegengesetzter, 14
 - geschlossener, 15
 - Länge, 12
 - positiv orientiert, 35
 - Spur, 12
 - Umparametrisierung, 13
 - zusammengesetzter, 14
- inverses Element, 3
- Irreduzibles Polynom, 84
- isolierte Singularität, 29
- Isomorphe Mannigfaltigkeiten, 74

- Jordan-Brouwer Zerlegungssatz, 35
- Jordanscher Kurvensatz, 35

- Körper, 3
- Körpererweiterung, 82
- Kettenregel, 5
- Kleinster Unterkörper, 82
- Kommutativität, 2
- Kompakter Operator, 125
- Komplement, 4

- komplex differenzierbar, 4
 - beliebig oft, 22
- Komplexe Karte, 71
- komplexe Konjugation, 3
- Komplexe Mannigfaltigkeit, 71
- Komplexe Untermannigfaltigkeit, 73
- komplexe Zahl, 2
 - Addition, 2
 - inverses Element, 3
 - Multiplikation, 2
- komplexe Zahlen
 - Abschluss, 51
- komplexer Logarithmus, 19
- Komplexer Tangentialraum, 72
- komplexes Polynom, 6
- komplexwertige 1-Form, 12
- konform, 61
- Konstante Garbe, 108
- Konvergenzradius, 9
- konvex, 15
- Kosinus, 10
- Kosinus hyperbolicus, 11
- Kurvenintegral, 12
 - Wert, 15

- Länge, 12
- Laplace-Operator, 64
- Laurent-Entwicklung, 31
- Laurent-Reihe, 32
- Leray, 109
- lineare Transformation, 58
- Liouville, 27
- Liouville für elliptische Funktionen, 53
- Loch, 151
- Logarithmus
 - Hauptzweig, 19
 - komplexer, 19
 - reeller, 19
 - Zweig, 20
- lokal beschränkt, 62
- Lokal endlich, 113
- lokal gleichmäßig konvergent, 47
- Lokal kompakter Hilbertraum, 125
- Lokale Gestalt holomorpher Funktionen, 76
- Lokaler Operator, 123

- Möbius-Transformation, 58
- Maxima
 - auf dem Rand des Holomorphiegebiets, 25
- Maximums-Prinzip, 25
- Mehrdimensional holomorph, 70
- Meromorphe Funktion, 79
- meromorphe Funktion, 32, 51
 - Singularitäten, 33
- Meromorpher Schnitt, 132
- Metrik, 62
- metrischer Raum, 62
- Minimums-Prinzip, 25
- Mittelwerteigenschaft, 26
- Montel, 62
- Morera, 36
- Multiplikation, 2

- Nebenteil einer Funktion, 30
- Nicht-Löcher-Semigruppe, 151
- Normale Riemannsche Fläche, 153
- Normaler Weierstraßpunkt, 153

- offen, 57
 offene Teilmenge, 4
 Ordnung, 79
 einer Nullstelle, 24, 27
 eines Pols, 32
 eines Pols im Unendlichen, 32
 Ordnung der Wronski-Determinante, 152
 Ordnung eines Schnitts, 132
 Ordnungsinvarianz, 79

 Parakompakt, 113
 Partialbruchzerlegung, 38
 Periode, 51
 Periodengitter, 52
 Poincaré-Dualität, 143
 Poisson-Integral, 66
 Poisson-Kern, 65
 Pol, 29
 im Unendlichen, 32
 Polarkoordinaten, 3
 Position, 13
 positiv orientiert, 35
 Prägarbe, 96
 Prägarben-Exaktheit, 112
 Prägarben-Homomorphismus, 98
 Prinzip vom Argument, 44
 Produktbündel, 106
 Produktregel, 5
 punktierte Kreisscheibe, 29
 punktierte Umgebung, 37
 punktweise beschränkt, 62
 punktweise konvergent, 8

 Quadratintegrale holomorphe Schnitte, 129
 Quotientengarbe, 101
 Quotientengruppe, 99

 Realteil, 2
 reell differenzierbar, 5
 reell-linear, 5
 reelle Zahl, 2
 reeller Logarithmus, 19
 Regulär/Nicht-singulär, 94
 Reguläres Polynom, 154
 Residuen holomorpher Formen, 133
 Residuensatz, 39, 134
 Residuum, 37
 rationaler Funktionen, 38
 Residuum einer 1-Form, 134
 Riemann-Hurwitz, 145
 Riemann-Roch, 140, 141, 144, 145
 Riemannsche Fläche, 74
 normale, 153
 Riemannsche Flächen aus Locus, 87
 Riemannsche Zahlenkugel, 32, 57
 Riemannsche Zeta-Funktion, 49
 Riemannscher Abbildungssatz, 63
 Riemannscher Hebbbarkeitssatz, 29
 Rouché, 46

 Satz der offenen Abbildung, 126
 Schnitt, 98
 schwankende Singularität, 29
 Schwarz, 61, 154
 Selbstabbildungen, 61
 Serre-Dualität, 143
 Singularität
 hebbare, 29
 isolierte, 29
 Pol, 29
 schwankende, 29
 wesentliche, 29
 Sinus, 10
 Sinus hyperbolicus, 11
 Spur, 12
 Stammfunktion, 15
 Stereographische Projektion, 57
 stereographische Projektion, 57
 sternförmig, 18
 Summenregel, 5

 Taylorreihe, 22
 Topologische Invarianz des Geschlechts, 144
 trigonometrische Identitäten, 11
 Triviales Bündel, 106

 Umgebung, 4
 Umlaufzahl, 34
 Umparametrisierung, 13
 Universelle Eigenschaft, 105
 Untergruppe, 51
 Untergruppen-Rang, 51
 Unterprägarben, 98

 Vektorbündel-Homomorphismus, 106
 Vertauschbarkeit
 von Integration und Differentiation, 21
 von Limes und Differentiation, 8
 von Limes und Integral, 8
 Verzweigungspunkt, 76
 Vielfachheit eines Punkts, 76

 Wegomotopie, 17
 Wegkomponente, 34
 Weierstraß, 47
 Weierstraß-Gewicht/-Punkt, 151
 Weierstraßpunkt
 hyperelliptischer, 153
 normaler, 153
 Weierstraßsche elliptische Funktion, 53
 Weierstraßsche Invarianten, 54
 Wert eines Kurvenintegrals, 15
 wesentliche Singularität, 29
 im Unendlichen, 32
 Wohldefiniertheit des Geschlechts, 131
 Wolkenkratzergarbe, 139
 Wronski-Determinante, 152

 zusammenhängend, 7
 Zweig der b -ten Potenz, 20
 Zweig des Logarithmus, 20
 Zweiter Endlichkeitssatz, 131