

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT BIELEFELD

Reine Mathematik

Differentialgeometrie

Dozent: Hsch.-Doz. PhD. Kim A. Frøyshov

WS 2002/03

Stand: Februar 2006

Differentialgeometrie

Hsch.-Doz. PhD. Kim A. Frøyshov

Differentialgeometrie

Reine Mathematik
Vorlesungsmitschrift

Dozent: Hsch.-Doz. PhD. Kim A. Frøyshov.

WS 2002/03

Fakultät für Mathematik,

Universität Bielefeld,

Germany.

<http://www.mathematik.uni-bielefeld.de>

<http://www.uni-bielefeld.de>

Skript: Dr. Benjamin Jurke, mail@benjaminjurke.net.

Letzte Änderung: 2. Dezember 2011.

<http://benjaminjurke.net>

Schriftbild: Modern Times 11 pt *Satzsystem:* L^AT_EX 2_ε mit A_MS-L^AT_EX, METAFONT, X_Y-pic

Enthält Literaturangaben und einen Index.

Copyright © 2005 - 2011 Hsch.-Doz. PhD. Kim A. Frøyshov, Dr. Benjamin Jurke.

Die Verteilung dieses Dokuments in elektronischer oder gedruckter Form ist gestattet, solange sein Inhalt einschließlich Autoren- und Copyright-Angabe unverändert bleibt und die Verteilung kostenlos erfolgt, abgesehen von einer Gebühr für den Datenträger, den Kopiervorgang, etc.

Inhaltsverzeichnis

1	Analysis auf Mannigfaltigkeiten	3
1.1	Glatte Mannigfaltigkeiten	3
1.2	Quotientenräume	5
1.3	Tangentialräume und -abbildungen	6
1.3.1	Algebraische Konstruktion des Tangentialraums	6
1.3.2	Tangentialabbildungen	7
1.4	Immersionen, Submersionen und Einbettungen	10
2	Vektorbündel und Differentialgleichungen	12
2.1	Tangentialbündel	12
2.2	Vektorfelder	12
2.3	Klammern von Vektorfeldern	13
2.4	Integralkurven	14
2.5	Maximaler lokaler Fluss	15
2.6	Geometrische Beschreibung, Interpretation der Klammern	16
3	Lie-Gruppen und Faserbündel	20
3.1	Lie-Gruppen und links-invariante Vektorfelder	20
3.2	Exponential-Abbildung	21
3.3	Adjungierte Darstellung	22
3.4	Matrix-Lie-Gruppen	23
3.5	Wirkung von Lie-Gruppen auf Mannigfaltigkeiten	23
3.5.1	Hauptfaser- G -Bündel	24
3.5.2	Isotropie-Gruppe und Lie-Gruppen als Quotientenräume	27
3.5.3	Beispiele für Quotienten-Lie-Gruppen	28
3.6	Zugeordnete Bündel	29
3.7	Vektorbündel	30
3.8	Rahmen-Bündel	30
4	Äußere Ableitung und Lie-Ableitung	32
4.1	Äußere Algebra	32
4.1.1	Alternierende k -Formen und die äußere Algebra	32
4.1.2	Derivationen in graduierten Algebren	33
4.2	Kontraktionen und glatte Differentialformen	34
4.3	Äußere Ableitung	36
4.4	Lie-Ableitung	36
4.4.1	Die Lie-Ableitung als Verallgemeinerung der Lie-Klammer	36
4.4.2	Eigenschaften der Lie-Ableitung	38
5	Grundelemente der Differentialgeometrie	40
5.1	Unterbündel und horizontale Distributionen	40

5.2	Der Satz von Frobenius	41
5.3	Krümmung horizontaler Distributionen	43
5.4	Zusammenhänge und kovariante Ableitung	44
5.5	Zusammenhangs-Formen	47
5.5.1	Zusammenhänge als Differentialformen	47
5.5.2	Kovariante Ableitung zu Zusammenhängen	48
5.5.3	Zusammenhänge in Vektorbündeln	49
5.6	Krümmung	51
5.6.1	Krümmung von Zusammenhängen	51
5.6.2	Der Raum der horizontalen vektorwertigen Differentialformen	51
5.6.3	Die Struktur-Gleichung	53
5.7	Äußere kovariante Ableitung	54
6	Zusammenhänge in Anwendung	57
6.1	Bianchi-Identität und Krümmung	57
6.2	Komplexe Linien-Bündel, erste Chern-Klasse	59
6.3	Krümmung in Vektorbündeln	62
6.4	Abbildungen von Zusammenhängen I	63
6.5	Pullback-Zusammenhänge	65
7	Holonomie	68
7.1	Holonomie im Allgemeinen	68
7.2	Holonomie in Vektorbündeln	69
7.3	Holonomie und die kovariante Ableitung	70
7.4	Abbildungen von Zusammenhängen II	72
7.5	Holonomie flacher Zusammenhänge	74
7.6	Zusammenhänge in Tensorprodukten	78
7.7	Flache $SO(3)$ -Zusammenhänge über dem 2-Torus	82
8	Charakteristische Klassen	85
8.1	Chern-Klassen	85
8.2	Pontrjagin-Klassen	88
8.3	Orientierungen	91
8.4	Euler-Klasse	91
8.5	Multilineare Abbildungen	96
8.6	Chern-Weil-Homomorphismus	97
8.7	Berechnungen von $I_*(G) = I_*(G; \mathbb{R})$	101
8.8	Berechnung der Euler-Klasse	102
9	Riemannsche Geometrie	108
9.1	Riemannsche Metriken und Zusammenhänge	108
9.2	Riemannsche Untermannigfaltigkeiten	114
9.3	Geodäten	115
9.4	Die Exponentialabbildung	118
9.5	Längen-minimierende Eigenschaften von Geodäten	119
9.6	Riemannsche Krümmung	122
9.6.1	Krümmungs-Transformationen	123
9.6.2	Bereichsweise Krümmung	124

9.6.3 Ricci-Krümmung	124
9.6.4 Skalare Krümmung	124
9.7 Das Gauss-Bonnet-Theorem	125
Literaturverzeichnis	127
Index	128

Einleitung

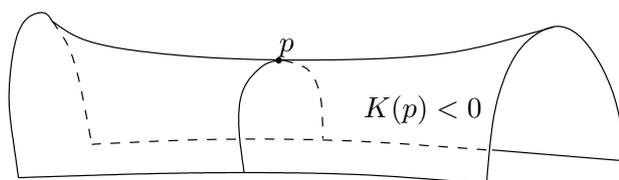
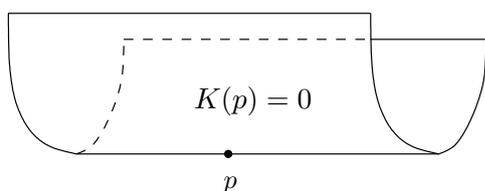
Im Gebiet der Differentialgeometrie interessieren im Wesentlichen die Zusammenhänge zwischen der Krümmung eines Raums und der Topologie. Durch die geometrischen Eigenschaften eines Raums werden somit seine topologischen Eigenschaften studiert.



Das Gauss-Bonnet-Theorem für Flächen im \mathbb{R}^3 liefert ein gutes Beispiel für eine derartige Verknüpfung. Glatte, geschlossene (kompakte und unberandete) Mannigfaltigkeiten $S \subset \mathbb{R}^3$ lassen sich bis auf Homöomorphismen durch ihr Geschlecht, d.h. die Anzahl der „Löcher“ klassifizieren. Die mathematische Formulierung definiert das Geschlecht durch $H_1(S; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$, genauer gesagt durch die Dimension einer Homologiegruppe.

Die Geometrie der Mannigfaltigkeit S wird durch die Gauss-Krümmung $K : S \rightarrow \mathbb{R}$ ausgedrückt. Zu anschaulichen Definition dieser Größe sei $p \in S$ gewählt, wobei wir der Einfachheit wegen $p = (0, 0, 0)$ annehmen, außerdem sei S bei p tangential zur x - y -Ebene. In einer Umgebung von p lässt sich S dann als Graph einer Funktion in x und y betrachten, es gilt

$$K(p) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) (p) .$$



Das Gauss-Bonnet-Theorem liefert dann den Zusammenhang

$$2 - 2g = \frac{1}{2\pi} \iint_S K \, df$$

zwischen Genus und Krümmung. Sei beispielsweise $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = r\}$ eine Sphäre mit Radius r , so ist die Krümmung an jedem Punkt dieser Geschlecht-0-Mannigfaltigkeit $\frac{1}{r^2}$, und Gauss-Bonnet liefert

$$2 = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{1}{r^2} \, df = \frac{1}{2\pi r^2} \cdot 4\pi r^2 .$$

Als nächste kann man folgende Frage formulieren: Stellen wir uns ein zweidimensionales Insekt vor, welches auf der Mannigfaltigkeit S lebt, aber noch nie etwas vom \mathbb{R}^3 gehört oder gesehen hat - ist dieses Insekt dann in der Lage, die Krümmung des Raums zu berechnen? Gauss liefert,

dass dies sehr wohl möglich ist. Eine alternative (intrinsische Definition) der Krümmung lässt sich wie folgt formulieren: Es sei

$$B_r(p) := \left\{ q \in S : \begin{array}{l} \text{Es existiert eine glatte Kurve } \gamma : [0, 1] \rightarrow S \text{ mit} \\ \gamma(0) = p \text{ und } \gamma(1) = q \text{ und Länge gleich } r \end{array} \right\},$$

dann ist die Krümmung am Punkt p durch

$$K(p) = - \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\text{Area}(B_r(p))}{\pi r^2} - 1 \right]$$

gegeben, wobei dieser Grenzwert immer existiert. Später werden wir diese Begriffe selbstverständlich genauer definieren und erläutern.

1 Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Obwohl grundlegende Kenntnisse der analytischen Methoden auf Mannigfaltigkeiten als bekannt voraus gesetzt werden, kann es nicht schaden, Grundbegriffe wie Tangentialraum, Einbettung, etc. zu wiederholen. Das erste Kapitel widmet sich daher im Wesentlichen der Repetition.

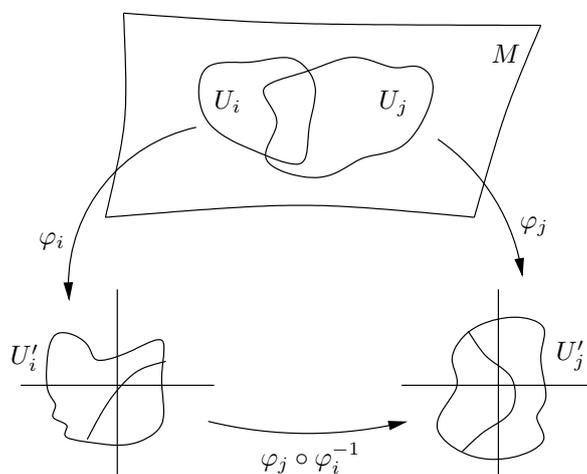
1.1 Glatte Mannigfaltigkeiten

Definition 1: Eine **topologische n -Mannigfaltigkeit** ist ein zweit-abzählbarer Hausdorff-Raum,¹ in dem jeder Punkt eine offene Umgebung hat, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n ist.

Ein **glatter Atlas** zusammen mit einer topologischen n -Mannigfaltigkeit M entspricht einer Familie $\{(\varphi_i, U_i, U'_i)\}_{i \in I}$ von offenen Mengen $U_i \subset M$ und $U'_i \subset \mathbb{R}^n$ sowie Homöomorphismen $\varphi_i : U_i \rightarrow U'_i$, sodass zum einen $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ gilt und die Zusammensetzung

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\cong} \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

glatt für alle $i, j \in I$ ist. Kurz gesagt sollen also Kartenwechsel glatte Abbildungen sein.



Definition 2: Ein glatter Atlas \mathcal{A} auf M heißt **maximal**, wenn es keinen glatten Atlas \mathcal{B} mit $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B}$ gibt.

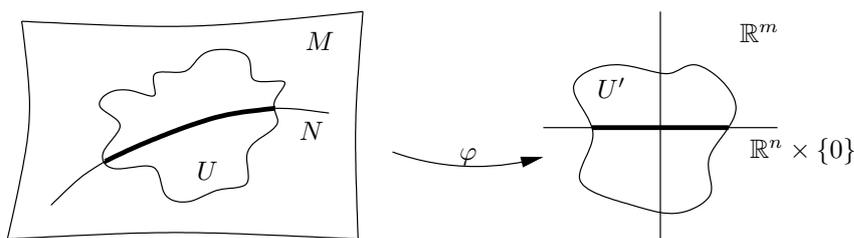
¹Würde die Hausdorff-Eigenschaft weggelassen, so würde die folgende Konstruktion erlaubt sein: Man betrachte zwei Kopien von \mathbb{R} , deren Punkte mit x bzw. y bezeichnet seien. Mit a sei der Punkt $x = 0$ und mit a' der Punkt $y = 0$ bezeichnet. Für $x < 0$ und $y < 0$ werden durch $x = y$ die Punkte der beiden Geraden identifiziert, sodass man ein Y-förmiges Gebilde erhält. Jeder Punkt davon ist zu einer offenen Teilmenge von \mathbb{R} homöomorph, aber für die Punkte a und a' finden sich keine trennenden offenen Umgebungen.

Bemerkung: Jeder Atlas \mathcal{A} für M ist in einem eindeutigen maximalen glatten Atlas \mathcal{B} enthalten, genauer gesagt in

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'} \mathcal{A}' .$$

Definition 3: Eine **glatte n -Mannigfaltigkeit** ist eine topologische n -Mannigfaltigkeit zusammen mit einem maximalen glatten Atlas.

Definition 4: Sei M eine glatte m -Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $N \subset M$ heißt **Untermannigfaltigkeit** der Dimension $n \leq m$, wenn es für jeden Punkt $p \in N$ eine Karte (φ, U, U') von M mit $p \in U$ gibt, sodass $\varphi(U \cap N) = U' \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ gilt.



Bemerkung: Eine Untermannigfaltigkeit ist eine topologische n -Mannigfaltigkeit. Die Einschränkungen der Karten

$$\varphi|_{U \cap N} : U \cap N \longrightarrow U' \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$$

liefern einen glatten Atlas für N .

Beispiel: Die Einheitskugel $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ ist eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{n+1} . Um dies zu zeigen genügt es, eine Karte φ von \mathbb{R}^{n+1} in der Umgebung des Nordpols $p = (0, \dots, 0, 1)$ zu finden. Mit Hilfe von

$$U := \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_n > 0\} \quad \text{und} \quad B^n := \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\} ,$$

definiere dann $S_+^n := S^n \cap U$ als obere Hemisphäre und $U' := B^n \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^{n+1}$ als Halbraum, dabei bezeichnet $\mathbb{R}_+ :=]0, \infty[$. Dann ist durch

$$\pi : S_+^n \longrightarrow B^n \quad (x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0, \dots, x_{n-1})$$

ein Homöomorphismus mit der inversen Abbildung $\pi^{-1}(y) = (y, \sqrt{1 - |y|^2})$ definiert („Plattdrücken“ der oberen Hemisphäre zu einer Disk). Eine Karte für \mathbb{R}^{n+1} um den Nordpol der $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ lässt sich damit durch

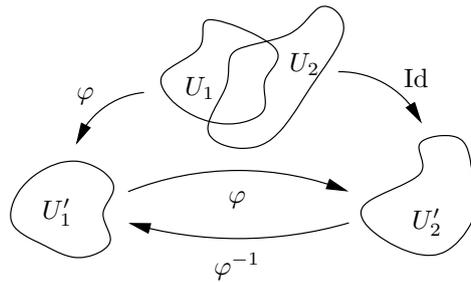
$$\varphi : U \longrightarrow B^n \times \mathbb{R}_+ \quad x \mapsto \left(\pi\left(\frac{x}{|x|}\right), |x| \right)$$

mit dem Inversen $\varphi^{-1}(y, t) = t\pi^{-1}(y)$ angeben. Es gilt dann für die S^n

$$\varphi(U \cap S^n) = B^n \times \{1\} = U' \cap (\mathbb{R}^n \times \{1\}) ,$$

d.h. die konstruierten Karten lassen die S^n lokal wie den Prototyp einer Untermannigfaltigkeit aussehen. Es ist noch zu zeigen, dass S^n auch eine glatte Untermannigfaltigkeit ist.

Durch $\{(\text{Id}, \mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1})\}$ ist ein (trivialer) glatter Atlas auf \mathbb{R}^{n+1} definiert. Sind dann zudem $U, U' \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offene Teilmenge und $\varphi : U \longrightarrow U'$ eine beliebige Karte, dann bilden die zwei Karten $\{(\text{Id}, \mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1}), (\varphi, U, U')\}$ genau dann einen glatten Atlas, wenn φ und φ^{-1} glatte Abbildungen sind.

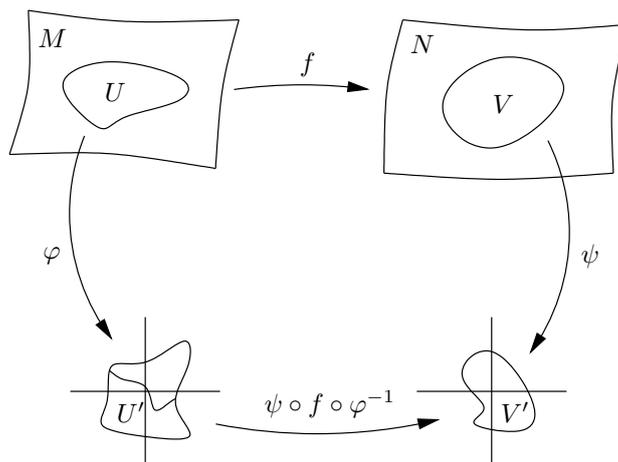


Bemerkung: Wenn M und N glatte Mannigfaltigkeiten sind, dann hat das **kartesische Produkt** $M \times N$ eine natürliche glatte Struktur: Für jede Karte (φ, U, U') von M und jede Karte (ψ, V, V') von N betrachte

$$(\varphi \times \psi, U \times V, U' \times V')$$

als Karte für $M \times N$. Die Menge aller solcher Produktkarten liefert wieder einen glatten Atlas für $M \times N$, wie man leicht verifiziert.

Definition 5: Sind M^m und N^n zwei glatte Mannigfaltigkeiten, dann heißt eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen diesen Mannigfaltigkeiten **glatt**, wenn für jede Karte (φ, U, U') von M und (ψ, V, V') von N die Zusammensetzung $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ glatt auf dem Definitionsgebiet ist.



Definition 6: Die Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt **Diffeomorphismus** falls eine glatte Abbildung $g : N \rightarrow M$ mit $f \circ g = \text{Id}_N$ und $g \circ f = \text{Id}_M$ existiert. f ist ein **lokaler Diffeomorphismus**, wenn es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset M$ gibt, sodass die Einschränkung $f|_U$ ein Diffeomorphismus von U in eine offene Teilmenge von N ist.

1.2 Quotientenräume

Betrachten wir nun **Quotientenräume**, beispielsweise den reellen projektiven Raum, der durch

$$\mathbb{R}P^n := S^n / \{\pm 1\} = \{(p, -p) : p \in S^n\}$$

definiert ist. Dann ist $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ eine zweiblättrig überdeckende Projektion und $\mathbb{R}P^n$ eine topologische n -Mannigfaltigkeit. Auf $\mathbb{R}P^n$ gibt es eine eindeutige glatte Struktur, sodass π auch ein lokaler Diffeomorphismus ist. Wir können allgemeiner formulieren:

Satz 7: Sei allgemeiner für eine beliebige glatte Mannigfaltigkeit M mit $\text{Diff}(M)$ die **Gruppe aller Diffeomorphismen** $M \rightarrow M$ bezeichnet. Sei $G \subseteq \text{Diff}(M)$ eine Untergruppe, die **echt unstetig** auf M operiert, d.h. für alle $p \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subset M$, sodass $g(U) \cap U = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus \{e\}$ gilt.

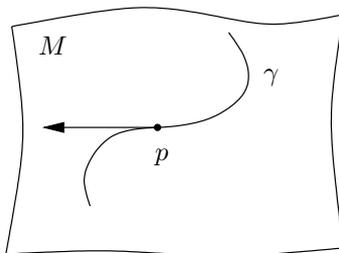
Dann ist $\pi : M \twoheadrightarrow M/G$ eine überdeckende Projektion und M/G hat eine eindeutige glatte Struktur, sodass π ein lokaler Diffeomorphismus ist.

Beispiel: Die Kleinsche Flasche entsteht durch $(S^1 \times S^1)/\{\text{Id}, \tau\}$ mit $\tau(w, z) = (\bar{w}, -z)$, wenn man die 1-Sphäre als Teilmenge von \mathbb{C} ansieht.

1.3 Tangentialräume und -abbildungen

1.3.1 Algebraische Konstruktion des Tangentialraums

Sei M eine glatte n -dimensionale Mannigfaltigkeit und $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$ eine glatte Kurve in diese Mannigfaltigkeit. Es stellt sich dann die Frage, was die Ableitung $\dot{\gamma}(0)$ bezeichnen könnte.



Die Idee ist nun, eine reellwertige Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ zu betrachten, und dann die zusammengesetzte Funktion $f \circ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ zu betrachten, denn für diese Funktion kennen wir Ableitungen. Wir müssen allerdings noch klären, inwiefern verschiedene Funktionen f sich unterschiedlich auswirken.

Definition 8: Mit $\mathcal{E}_p(M)$ bezeichnen wir die **Algebra der glatten Funktionenkeime** in der Umgebung des Punktes p , d.h. es gilt

$$\mathcal{E}_p(M) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ für eine offene Umgebung } U \subset M \text{ um } p \text{ und } f \text{ glatt}\} / \sim$$

mit $f \sim g$ genau dann, wenn $f = g$ in einer beliebigen Umgebung von p gilt.

Definition 9: Eine **Derivation** auf $\mathcal{E}_p(M)$ ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $X : \mathcal{E}_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$, sodass die Leibniz-Produktregel

$$X(f \cdot g) = [X(f)]g(p) + f(p)[X(g)] .$$

für alle Funktionen $f, g \in \mathcal{E}_p(M)$ erfüllt ist.

Der Kürze halber schreibt man auch Xf für $X(f)$, sodass die Leibniz-Regel in der vorigen Definition durch $X(fg) = (Xf)g(p) + f(p)(Xg)$ notiert wird.

Beispiel: Eine Derivation ist etwa durch $Xf := (f \circ \gamma)'(0)$ gegeben.

Definition 10: Mit $T_p M := \{\text{Derivationen von } \mathcal{E}_p(M)\}$ ist der (algebraische) **Tangentialraum** der Mannigfaltigkeit M am Punkt p bezeichnet.

Neben dem algebraischen Tangentialraum gibt es auch eine geometrische und physikalische Konstruktion, die alle äquivalent zueinander sind. Details und die zugehörigen Isomorphismen zwischen den verschiedenen Tangentialräumen sind etwa in JÄNICHs „Vektoranalysis“ zu finden.

Lemma 11: Die Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow T_0\mathbb{R}^n$ mit $(a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i \partial_i$ ist ein linearer Isomorphismus, wobei $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$ die Differentiation in Richtung der i -ten lokalen Koordinate ist.

Beweis. • **Injektivität:** Gilt $\sum_{i=1}^n a_i \partial_i = 0$, dann folgt auch $0 = (\sum_{i=1}^n a_i \partial_i)(x_j) = a_j$.

• **Surjektivität:** Sei $f \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R}^n)$ ein glatter Funktionskeim bei $x_0 = 0$, dann folgt

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \partial_i f(tx) dt = \sum_{i=1}^n x_i f_i(x)$$

$$\iff f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i f_i(x).$$

Für eine Derivation $X \in T_0\mathbb{R}^n$ (aufgefasst als Richtungsableitung) gilt dann unter Verwendung der Leibniz-Produktregel und $f_i(0) = \partial_i f(0)$

$$Xf = 0 + \sum_{i=1}^n \left[X(x_i)|_0 f_i(0) + 0 \cdot X(f_i)|_0 \right] = \sum_{i=1}^n a_i \partial_i f(0)$$

für $a_i := X(x_i)$, also ist $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ein Urbild zur Derivation X . Die Linearität ergibt sich direkt aus der Linearität von Ableitungen. □

Definition 12: Mit $\mathcal{C}_p(M)$ sei die **Algebra der stetigen Funktionskeime** in der Umgebung von p bezeichnet.

Übung: Man zeige, dass es keine nicht-verschwindenden Derivationen für $\mathcal{C}_p(M)$ gibt.

1.3.2 Tangentialabbildungen

Definition 13: Für eine glatte Funktion $f : M \rightarrow N$ definieren wir die **Tangentialabbildung** $Tf_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ durch die Zusammensetzung

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \supset U \\ & \searrow & \swarrow g \\ & & \mathbb{R} \end{array} \rightsquigarrow T_p M \xrightarrow[\left(X : \mathcal{E}_p(M) \rightarrow \mathbb{R} \right) \mapsto \left(Tf_p(X) : \mathcal{E}_{f(p)}(N) \rightarrow \mathbb{R} \right)]{Tf_p} T_{f(p)} N$$

d.h. es gilt $Tf_p(X)g = X(g \circ f)$, wobei $g \in \mathcal{E}_{f(p)}(N)$ ein glatter Funktionskeim am Zielpunkt $f(p) \in N$ ist.

Wir müssen nun nachprüfen, dass für eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{Df_0} & \mathbb{R}^n \\ \cong \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \cong \\ T_0\mathbb{R}^m & \xrightarrow{Tf_0} & T_0\mathbb{R}^n \end{array}$$

kommutiert. Dies tut es in der Tat aufgrund der Kettenregel der Differentiation, also wegen

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \quad D(g \circ f)_0 = Dg_{f(0)} \circ Df_0 .$$

Für Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten lautet die zugehörige Kettenregel für Tangentialabbildungen dann analog

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \quad \rightsquigarrow \quad T(g \circ f)_p = Tg_{f(p)} \circ Tf_p$$

Satz 14 (Inverse Funktion): *Ist $f : M \rightarrow N$ eine glatte Funktion zwischen glatten Mannigfaltigkeiten und die zugehörige Tangentialabbildung $Tf_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ ein Isomorphismus für ein $p \in M$, dann ist f ein lokaler Diffeomorphismus um p .*

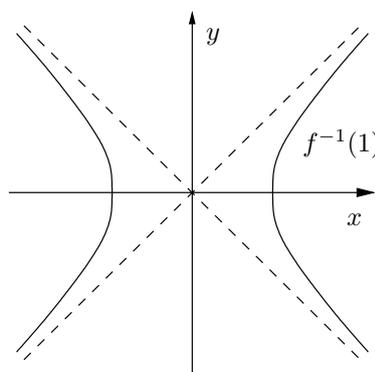
Beweis. Siehe [Lan95] Kapitel I §5. □

Definition 15: Sei $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Dann ist der Punkt $q \in N$ ein **regulärer Wert** wenn die Tangentialabbildung Tf_p für alle Punkte des Urbilds $p \in f^{-1}(q)$ surjektiv ist.

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ definiert, dann entspricht $f^{-1}(0)$ der Vereinigung der beiden Diagonalen im \mathbb{R}^2 , dies liefert aber keine glatte Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 . Für $r \neq 0$ liefert $f^{-1}(r)$ zwei hyperbolische Kurven. Betrachten wir dann die Ableitung

$$Df(x, y) = (2x, -2y) ,$$

dann ist die Tangentialabbildung $Tf_{(x,y)}$ genau dann surjektiv, wenn $(x, y) \neq (0, 0)$ ist. Die regulären Werte von f sind also gerade $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

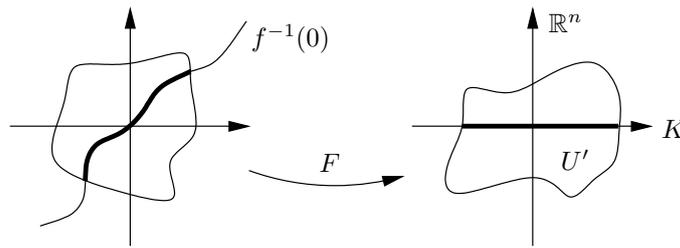


Lemma 16: *Sei $q \in N$ ein regulärer Wert der Abbildung $f : M \rightarrow N$, dann ist das Urbild $f^{-1}(q)$ eine glatte Untermannigfaltigkeit von M mit $\dim(f^{-1}(q)) = \dim M - \dim N$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir (gegebenenfalls nach Vorschalten von Karten) von $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$ und $q = 0$ ausgehen, außerdem sei $f(0) = 0$. Sei dann $K := \ker Df_0$ definiert, wähle anschließend einen linearen Unterraum $V \subset \mathbb{R}^m$, sodass $\mathbb{R}^m = K \oplus V$ gilt. Folglich ist aus Dimensionsgründen $Df_0|_V : V \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus.

Sei dann $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow K$ die lineare Projektion auf den Unterraum. Durch $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times K$ mit $F(x) = (f(x), \pi(x))$ sei eine Abbildung mit der Ableitung

$$DF_0(v) = (Df_0(v), D\pi_0(v)) = (Df_0(v), \pi(v))$$



definiert, insbesondere ist DF_0 dann ein Isomorphismus. Nach dem Theorem der inversen Funktion ist dann F ein lokaler Diffeomorphismus bei $0 \in \mathbb{R}^m$, also existieren offene Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^m$ und $U' \subset \mathbb{R}^n \times K$ mit $0 \in U$, sodass $F|_U : U \xrightarrow{\approx} U'$ ein Diffeomorphismus ist. Außerdem gilt $F(U \cap f^{-1}(0)) = U' \cap (0 \times K)$, also ist die Eigenschaft einer Untermannigfaltigkeit erfüllt. \square

Beispiel: Betrachten wir die Matrizengruppe $SO(n) := \{A \in \mathbb{M}(n \times n, \mathbb{R}) : AA^t = \mathbb{1}\}$ und die Abbildung $f : \mathbb{M}(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}(n \times n, \mathbb{R})$ mit $A \mapsto AA^t$. Wegen

$$(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$$

sind die Zielmatrizen insbesondere symmetrisch, es gilt also $f : \mathbb{M}(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ und $SO(n) = f^{-1}(\mathbb{1})$. Um zu zeigen, dass die spezielle orthogonale Gruppe eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{M}(n \times n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ ist, müssen wir nachweisen, dass $\mathbb{1}$ ein regulärer Wert von f ist. Dazu berechnen wir die Ableitung von f , wobei wir f als Zusammensetzung gemäß

$$A \xrightarrow{\text{linear}} (A, A^t) \xrightarrow{\text{bilinear}} AA^t$$

auffassen können. Dabei hat die Matrizenmultiplikations-Abbildung $g : (A, B) \mapsto AB$ die Ableitung $Dg_{(A,B)}(C, D) = AD + BC$, es gilt also

$$Df_A(B) = AB^t + BA^t$$

gemäß der Kettenregel, und damit $Df_{\mathbb{1}}(B) = B + B^t$. Insbesondere entspricht die Einschränkung auf symmetrische Matrizen $Df_{\mathbb{1}}|_{\text{Sym}(n, \mathbb{R})}$ einfach der Multiplikation mit Faktor 2, also ist die volle Abbildung $Df_{\mathbb{1}} : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ surjektiv.

Für $B \in SO(n)$ gilt nun $f(AB) = AB(AB)^t = ABB^t A^t = AA^t = f(A)$, d.h. die Abbildung f ist invariant unter Multiplikation rechtsseitiger $SO(n)$ -Matrizen, mit $R_B(A) = AB$ gilt also $f \circ R_B = f$. Damit folgt $Df_B \circ (DR_B)_{\mathbb{1}} = Df_B \circ R_B = Df_{\mathbb{1}}$, also kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{Df_{\mathbb{1}}} & \text{Sym}_n(\mathbb{R}) \\ \cong \downarrow R_B \circ & \nearrow Df_B & \\ \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) & & \end{array}$$

Damit erhalten wir schließlich, dass Df_B surjektiv ist und damit die Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ insbesondere ein regulärer Wert von f ist. Die $SO(n) = f^{-1}(\mathbb{1})$ ist dann eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$.

1.4 Immersionen, Submersionen und Einbettungen

Definition 17: Seien M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten. Eine glatte Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen diesen heißt **Submersion** falls die Tangentialabbildung Tf_p für alle $p \in M$ surjektiv ist, **Immersion** wenn Tf_p injektiv für alle $p \in M$ ist. Den **Rang der Tangentialabbildung** definieren wir durch $\text{Rang}(Tf_p) := \dim(\text{im}(Tf_p))$.

Lemma 18: Sei $f : M^m \rightarrow N^n$ eine glatte Abbildung mit $\text{Rang}(Tf_q) = r$ für alle Punkte q in einer Umgebung von $p \in M$. Dann existieren offene Teilmengen $U \subset M$ und $V \subset N$ mit $p \in U$ und $f(U) \subset V$ sowie Diffeomorphismen $U \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^m$ und $V \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n$, sodass

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \approx \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \approx \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

das Diagramm kommutiert.

Beweis. Der Einfachheit wegen nehmen wir $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$ und $p = 0$ an. Dann betrachten wir den weiteren Beweis in einzelnen Schritten:

1. Sei $r = m$, d.h. Tf_p sei injektiv. Wähle dann einen linearen Unterraum $E \subset \mathbb{R}^n$, sodass die Zerlegung

$$\mathbb{R}^n = \text{im}(Df_0) \oplus E$$

gilt und definiere $g : \mathbb{R}^m \times E \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $(x, y) \mapsto f(x) + y$. Dann ist die Ableitung $Dg_{(0,0)}$ am Nullpunkt ein Isomorphismus, sodass g ein lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung von $(0, 0)$ ist, für den insbesondere gilt

$$g^{-1} \circ f(x) = (x, 0) .$$

2. Sei r beliebig. Gegebenenfalls nach einem linearen Koordinatenwechsel in \mathbb{R}^m und \mathbb{R}^n können wir annehmen, dass

$$Df_0 = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0) & \\ \hline \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$$

gilt. Definiere dann eine Abbildung

$$h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \quad x \mapsto (f_1(x), \dots, f_r(x), x_{r+1}, \dots, x_m) ,$$

für die $Dh_0 = \mathbb{1}_m$ folgt, dann ist h ein lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung von 0. Definiere dann für $y = (y_1, \dots, y_r, y_{r+1}, \dots, y_m)$ die Abbildung

$$\tilde{f}(y) = f \circ h^{-1}(y) = (y_1, \dots, y_r, \varphi_1(y), \dots, \varphi_{m-r}(y))$$

mit $\text{Rang}(D\tilde{f}_y) = r$ für $|y|$ klein. Für alle $j > r$ und $|y|$ klein gilt $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}(y) = 0$, also folgt

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_j}(y) = 0$$

für $j > r$ und $|y|$ klein, d.h. $\tilde{f}(y)$ hängt in einer Umgebung der Null nur von den ersten r Koordinaten ab. Nun ist

$$(y_1, \dots, y_r) \mapsto \tilde{f}(y_1, \dots, y_r, 0, \dots, 0)$$

immersiv bei Null - also eine Immersion - und wir können den ersten Fall anwenden, um einen Koordinatenwechsel im Tangentialraum zu vollziehen.

Damit ist der Satz bewiesen.

□

2 Vektorbündel und Differentialgleichungen

Im zweiten Kapitel werden Vektorfelder genauer behandelt, wobei allerdings auch hier gewisse Grundkenntnisse vorausgesetzt werden. Der Fluß eines Vektorfeldes als richtungsinduzierte Transformation der Punkte des Grundraums nutzt einige Elemente der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen. Außerdem wird durch die Lie-Klammer ein Produkt von Vektorfeldern eingeführt, welches zugleich ein Spezialfall der Lie-Ableitung ist.

2.1 Tangentialbündel

Definition 19: Sei M eine glatte n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Als Menge betrachtet definieren wir das **Tangentialbündel** als

$$TM := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M$$

zusammen mit einer Projektion $\pi : TM \rightarrow M$.

Für eine beliebige Karte (φ, U, U') für M um $p \in M$ ist die zugehörige Tangentialabbildung $T\varphi_p : T_p M \xrightarrow{\cong} T_{\varphi(p)} U' \cong \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus. Dann kommutiert mit der Bündel-Projektion $\pi : TM \rightarrow M$ das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow[\varphi_U]{\text{Bijektion}} & U \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & U \end{array}$$

Bemerkung: Das Tangentialbündel TM hat eine eindeutige Struktur als glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$, sodass die Projektion π stetig ist und jede Karte φ_U ein Diffeomorphismus:

Sei $\bigcup_{\alpha} V_{\alpha} = X$ eine Überdeckung. Wenn $V_{\alpha} \cap V_{\beta}$ offen in V_{α} ist und die Unterraumtopologien von V_{α} und V_{β} übereinstimmen, dann existiert eine eindeutige Topologie auf X , sodass $V_{\alpha} \hookrightarrow X$ eine offene Einbettung für alle α ist.

2.2 Vektorfelder

Definition 20: Eine glattes **Vektorfeld** auf M ist ein **glatter Schnitt** des Tangentialbündels, d.h. eine glatte Abbildung $X : M \rightarrow TM$, sodass $\pi \circ X = \text{Id}_M$ gilt.

Übung: Man zeige, dass in \mathbb{R}^n jedes Vektorfeld die Form $X = \sum_{i=1}^n a_i \partial_i$ mit glatten Funktionen $a_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ hat.

2.3 Klammern von Vektorfeldern

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathfrak{X}(M) := \{\text{glatte Vektorfelder auf } M\}$. Wir werden nun eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

definieren. Zuerst sei $\mathcal{C}^\infty(M) := \{\text{glatte Funktionen } M \rightarrow \mathbb{R}\} = \Gamma(TM)$ definiert. Zwei glatte Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ auf der offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ lassen sich lokal durch

$$X = \sum_i a_i \partial_i \quad \text{und} \quad Y = \sum_j b_j \partial_j$$

mit $a_i, b_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ darstellen. Für $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ ist dann $Yf : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch $(Yf)(p) = Tf_p(Y_p)$ definiert, wobei man $Tf_p \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ beachte. Dann gelten

$$\begin{aligned} XYf &= \sum_{i,j} a_i \partial_i (b_j \partial_j f) = \sum_{i,j} a_i (\partial_i b_j \cdot \partial_j f + b_j \partial_i \partial_j f) \quad \text{und} \\ YXf &= \sum_{i,j} b_i (\partial_i a_j \cdot \partial_j f + a_j \partial_i \partial_j f) \end{aligned}$$

sodass wir für die Differenz dieser beiden Größen somit erhalten:

$$(XY - YX)f = \sum_j \sum_i (a_i \partial_i b_j - b_i \partial_i a_j) \partial_j f + \sum_i \sum_j \overbrace{(a_i b_j (\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i))}^0 f .$$

Damit treten keine zweiten partiellen Ableitungen oder ähnliches auf, sodass $[X, Y]$ die lokale Form eines Vektorfelds auf $U \subset \mathbb{R}^n$ hat, also haben wir gezeigt:

Lemma 21: *Zu zwei Vektorfeldern $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ über $U \subset M$ offen existiert ein eindeutiges Vektorfeld $[X, Y] \in \mathfrak{X}(U)$, sodass $(XY - YX)f = [X, Y]f$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ gilt, genauer also*

$$[X, Y] := \sum_{i,j} (a_i \partial_i b_j - b_i \partial_i a_j) \partial_j .$$

Satz 22: *Sind $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ zwei Vektorfelder auf ganz M (man beachte den Unterschied M zu U im vorigen Lemma), dann existiert genau ein Vektorfeld $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$, sodass $(XY - YX)f = [X, Y]f$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt.*

*Das so definierte Produkt bezeichnet man auch als **Lie-Klammer**, **Produkt-Klammer** oder **Kommutator**.*

Beweis. Wir zeigen nur die Eindeutigkeit. Dazu verwende man eine glatte Stufen-Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, welche in den Randbereichen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ 1 & : x \geq 1 \end{cases}$$

erfüllt. Fügt man diese Funktionen passend zusammen, so übertragen sich die eindeutigen lokalen Strukturen in eine globale Klammer, die eindeutig ist. \square

Wir können die Proposition auf auf einem anderen Weg beweisen:

Definition 23: Eine $\mathcal{C}^\infty(M)$ -**Derivation** ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\delta : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$, sodass die Leibniz-Regel $\delta(f \cdot g) = \delta(f)g + f\delta(g)$ für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt.

Man prüfe dann, dass $XY - YX$ eine Derivation von $\mathcal{C}^\infty(U)$ für jede offene Teilmenge $U \subset M$ ist. Folglich ist dann $f \mapsto [(XY - YX)f](p)$ eine Derivation in $\mathcal{E}_p(M)$, also $XY - YX$ ein Vektorfeld. Dies liefert den zweiten Weg, die Lie-Klammer zu definieren.

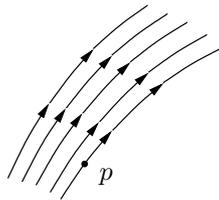
Definition 24: Eine reelle **Lie-Algebra** ist ein reeller Vektorraum A zusammen mit einer \mathbb{R} -linearen Abbildung $[\cdot, \cdot] : A \times A \rightarrow A$, sodass gilt:

1. *Schief-Symmetrie:* $[X, Y] = -[Y, X]$
2. *Jacobi-Identität:* $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ für alle $X, Y, Z \in A$.

Beispiel: Die Menge der glatten Vektorfelder $\mathfrak{X}(M)$ zusammen mit der definierten Lie-Klammer ist eine Lie-Algebra unendlicher Dimension.

2.4 Integralkurven

Wo treten Vektorfelder in der Physik auf? Betrachten wir (wie in der Abbildung) eine Flüssigkeit, die eine Oberfläche entlangfließt. Der Weg eines Teilchens entlang dieses Flusses ist dann eine Integralkurve.



Definition 25: Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld. Ein Weg $r :]a, b[\rightarrow M$ heißt **Integralkurve** von X wenn $r'(t) = X_{r(t)}$ für alle $t \in]a, b[$ gilt.

Um den Begriff zu veranschaulichen und den Formalismus zu sehen, betrachten wir einige konkrete Beispiele.

Beispiel: • Sei $M = \mathbb{R}^2$ und $X_{(x,y)} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ ein Vektorfeld. Dann sind die zugehörigen Integralkurven von der Form $r(t) = ze^{it}$ für $z \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Die beiden partiellen Ableitungen sind dabei als Basisvektoren zu interpretieren, d.h. es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} r(x, y) = -y \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} r(x, y) = x \quad \implies \quad r'(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

- Sei $M = \mathbb{R}$ und $X_t = f(t) \frac{d}{dt}$ das Vektorfeld, dann ist $r :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Integralkurve zu f genau dann, wenn

$$r'(t) = X_{r(t)} = f(t) \frac{d}{dt} \stackrel{(*)}{\cong} f(t) \iff r(t) = r(0) + \int_0^t f,$$

wobei man an der mit (*) gekennzeichneten Stelle beachte, das $\frac{d}{dt}$ als Basisvektor zu verstehen ist.

Satz 26 (Existenz von Integralkurven): Für jeden Punkt $p \in M$ gibt es ein $a > 0$ und eine Integralkurve $r :]-a, a[\rightarrow M$ mit $r(0) = p$ zum glatten Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Satz 27 (Eindeutigkeit von Integralkurven): Sind $r_1, r_2 :]-a, b[\rightarrow M$ mit $a, b > 0$ zwei Integralkurven zu demselben Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ und ist $r_1(0) = r_2(0)$, dann gilt $r_1 = r_2$.

Korollar 28: Für jeden Punkt $p \in M$ existiert eine eindeutige maximale (d.h. größtes Definitionsintervall) Integralkurve $\alpha_p :]-a_p, b_p[\rightarrow M$ mit $a_p, b_p > 0$ mit $\alpha_p(0) = p$.

Beweis. Siehe [Lan95] Kapitel IV §1. □

2.5 Maximaler lokaler Fluss

Wir betrachten nun, wie sich die Integralkurven unmittelbar benachbarter Punkte verhalten, d.h. den Verlauf mehrerer Integralkurven. Aus der Existenz eindeutiger maximaler Integralkurven zum Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ folgt unmittelbar:

Satz 29: Sei $A := \bigcup_{p \in M}]-a_p, b_p[\times \{p\} \subset \mathbb{R} \times M$ das Produkt der maximalen Definitionsintervalle von Integralkurven durch die Punkte von M . Dann gilt:

1. $A \subset \mathbb{R} \times M$ ist offen und $\{0\} \times M \subset A$.
2. Der **maximale lokale Fluss** $\varphi : A \rightarrow M$ mit $(t, p) \mapsto \alpha_p(t)$ ist glatt, wir notieren ihn durch $\varphi_t(p) = \varphi(t, p) = \alpha_p(t)$.

Korollar 30: 1. Es gilt $\varphi_0 = \text{Id}$, also $\varphi_0(p) = \alpha_p(0) = p$ für alle $p \in M$.

2. Die Abbildung $s \mapsto \varphi_s \varphi_t(p)$ mit t, p fest ist im Definitionsgebiet eine Integralkurve zu X . Insbesondere gilt $\varphi_s \varphi_t(p) = \varphi_{s+t}(p)$, da die Abbildungen für $s = 0$ übereinstimmen.
3. Ist M kompakt, dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $[-\varepsilon, \varepsilon] \times M \subset A$. Nach dem zweiten Punkt gilt dann $A = \mathbb{R} \times M$, d.h. wir erhalten einen sogenannten **globalen Fluss**.

Beweis. Die ersten beiden Aussagen sind trivial. Zum letzten Punkt: Ist $r :]-a, b[\rightarrow M$ eine Integralkurve und $b - \varepsilon < c < b$, dann kann die Integralkurve auf $]-a, b + \varepsilon[$ ausgedehnt werden, da $\varphi_\varepsilon r$ nach 2. wieder eine Integralkurve ist. So lässt sich schrittweise die Integralkurve vergrößern, bis der Definitionsbereich ganz \mathbb{R} ist. □

Definition 31: Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ heißt **komplett**, wenn es einen zugehörigen globalen Fluss $\varphi_t : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ besitzt.

Insbesondere ist bei einem kompletten Vektorfeld $\varphi_t(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M)$ ein Gruppen-Homomorphismus. Suchen wir nun nach einem nicht kompletten Vektorfeld.

Beispiel: Betrachte $M =]0, \infty[$ und $X = \frac{d}{dt}$, wir möchten also, dass für die Ableitung der Integralkurve $r'(t) = X_{r(t)} = \frac{d}{dt} \cong 1$ gilt, wobei man $T_{r(t)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ mit $\frac{d}{dt} \mapsto 1$ berücksichtige. Mit $r'(t) \in T_{r(t)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ folgt $r(t) = t + C$. Die Integralkurve ist aber nicht komplett, da diese Abbildung nur auf $]-C, \infty[\times M$, nicht aber auf $\mathbb{R} \times M$, definiert ist.

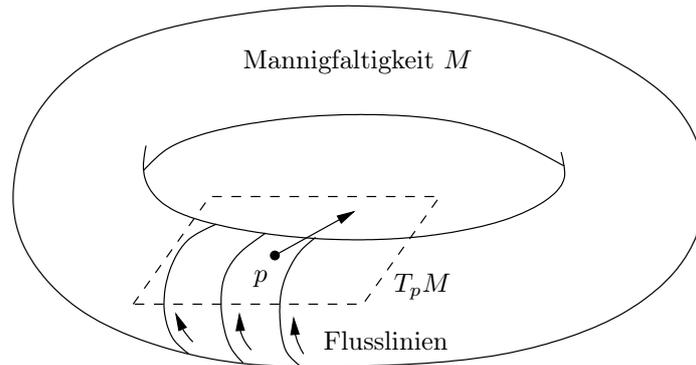
Übung: Welches der folgenden Vektorfelder ist komplett?

1. $M = \mathbb{R}$ und $X_t = \frac{t}{1+t^2} \frac{d}{dt}$
2. $M = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ und $X_{(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial y}$.

2.6 Geometrische Beschreibung, Interpretation der Klammern

Lemma 32: Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ zwei Vektorfelder und φ der lokale Fluss von X . Dann gilt für jeden Punkt $p \in M$

$$[X, Y]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[Y_p - (T\varphi_t(Y))_p \right] = - \frac{d}{dt} \Big|_0 (T\varphi_t(Y))_p$$



Bemerkung: Wie in der Abbildung angedeutet wird durch die Zuordnung $t \mapsto (T\varphi_t(Y))_p \in T_p M$ eine „Kurve“ im Tangentialraum $T_p M$ beschrieben. Man beachte dabei, dass diese Derivation für einen Funktionskeim $f \in \mathcal{E}_p(M)$ durch $(T\varphi_t(Y))_p f = (T\varphi_t)(Y_{\varphi_{-t}(p)}) = Y(f \circ \varphi_t)_{\varphi_{-t}(p)}$ gegeben ist.

Außerdem sei an dieser Stelle noch einmal die Funktorialität von Vektorfeldern angemerkt. Sei $f : M \xrightarrow{\cong} N$ ein Diffeomorphismus zwischen zwei Mannigfaltigkeiten und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein glattes Vektorfeld. Dann erhalten wir ein **induziertes Vektorfeld** $f_* X \in \mathfrak{X}(N)$, dass durch die Gleichung

$$(f_* X)_{f(p)} = Tf_p(X_p)$$

definiert ist. Dieses ist genau das Vektorfeld, welches das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \left. \begin{array}{c} X \uparrow \\ \downarrow \pi_M \end{array} \right) \circlearrowleft & & \left(\begin{array}{c} \uparrow f_* X \\ \downarrow \end{array} \right) \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad f_* X = Tf \circ X \circ f^{-1}$$

kommutativ macht. Man beachte also, dass das induzierte Bündel punktweise für $q \in N$ durch

$$(f_* X)_q = Tf \circ X \circ f^{-1}(q) = Tf_{f^{-1}(q)}(X_{f^{-1}(q)}) = (Tf(X))_{f^{-1}(q)} =: (Tf(X))_q$$

gegeben ist. Im konkreten Fall ist dann $f = \varphi_t$ und wegen der Fluss-Eigenschaft $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ gilt dann $(T\varphi_t(X))_p = T(\varphi_t)_{\varphi_{-t}(p)}(X_{\varphi_{-t}(p)})$.

Beweis. Für $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ definiere $\psi(t, p) := f \circ \varphi_t(p)$ auf $A \subset \mathbb{R} \times M$, dem Gebiet des lokalen Flusses. Dann gilt

$$\psi(t, p) = \psi(0, p) + t \overbrace{\int_0^1 \partial_1 \psi(st, p) ds}^{g_t(p)},$$

also folgt $f \circ \varphi_t = f + tg_t$ mit $g_t(p) = g(t, p) = \int_0^1 \partial_1 \psi(st, p) ds$, wobei insbesondere $g_0 = Xf$ gilt. Unter Verwendung der Kettenregel folgt dann

$$(T\varphi_t(Y))_p f = Y(f \circ \varphi_t)_{\varphi_{-t}(p)} = (Yf)_{\varphi_{-t}(p)} + t(Yg_t)_{\varphi_{-t}(p)},$$

wobei man t als Konstante auffasse. Dabei ist $t \mapsto \varphi_t(p)$ die maximale Integralkurve zu X mit $\varphi_0(p) = p$, außerdem gilt $\frac{d}{dt}th(t) = h(t) + th'(t)$, also gilt $\frac{d}{dt}\Big|_0 th(t) = h(0)$. Insbesondere gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_0 (T\varphi_t(Y))_p f &= \frac{d}{dt}\Big|_0 (Yf)_{\varphi_{-t}(p)} + \Big|_0 (Yg_t)_{\varphi_{-t}(p)} + t \underbrace{\frac{d}{dt}\Big|_0 (Yg_t)_{\varphi_{-t}(p)}}_0 \\ &= -XYf(p) + (Yg_0)_p \end{aligned}$$

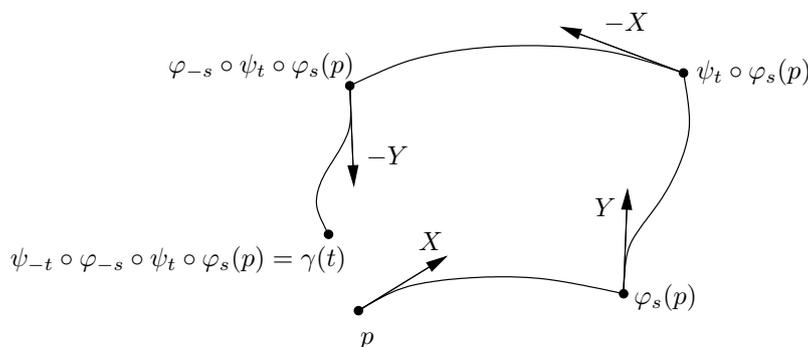
nach Definition. Schließlich erhalten wir also

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 (T\varphi_t(Y))_p f = -XYf(p) + (Yg_0)_p = -XYf(p) + YXf(p)$$

und damit ist die Aussage gezeigt. \square

Man bezeichnet dabei $-\frac{d}{dt}\Big|_0 (T\varphi_t(Y))_p$ als **Lie-Ableitung**, die kurz durch $L_X Y$ notiert wird. Man hat also zwei Bezeichnungen für das gleiche Objekt, allerdings ist die Lie-Ableitung eine allgemeinere Konstruktion, die man auch für Tensoren definieren kann (dies wird später auf Seite 36 geschehen). Die Lie-Klammer dagegen ist nur für Vektor-Felder definiert.

Die Lie-Klammer bzw. -Ableitung liefert uns eine wichtige Information darüber, wie gut die Integralkurven von Vektorfeldern zusammenpassen. Dies wird im nächsten Satz bewiesen. In der Abbildung ist die Hintereinanderschaltung der Integralkurven bzw. Flüsse zweier Vektorfelder als Kurve $\gamma(t)$ graphisch dargestellt.



Fassen wir noch einmal kurz zusammen: Wenn $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ zwei Vektorfelder auf M sind und φ ein lokaler Fluss zu X , dann beschreibt der Fluss eine Integralkurve durch p . Entlang dieser Kurve gilt im Tangentialraum¹

$$t \mapsto (T\varphi_t)(Y_{\varphi_{-t}(p)}) \in T_p M,$$

und das Ableiten dieses Terms bei $t = 0$ liefert dann die Lie-Klammer $-[X, Y]_p$.

Wenn der Fluss φ global ist, etwa für kompakte Mannigfaltigkeiten M , dann ist $\varphi_t : M \rightarrow M$ sogar ein Diffeomorphismus. Die vorige Abbildung transformiert also die Tangentialvektoren in Y über die Tangentialabbildung dieses Diffeomorphismus φ .

¹Für weitere Erläuterungen siehe Kapitel V in [Lan95], wo die Definition eines induzierten Bündels ausführlicher behandelt wird.

Satz 33: *Es seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ zwei komplette Vektorfelder und φ bzw. ψ die zugehörigen globalen Flüsse. Für $s, t \in \mathbb{R}$ liefern die Flüsse zwei einparametrische Diffeomorphismen φ_s bzw. ψ_t von M . Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

1. Für die Lie-Klammer gilt $[X, Y] = 0$.
2. Die Flüsse kommutieren gemäß $\varphi_s \psi_t = \psi_t \varphi_s$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

Beweis. • „2. \Rightarrow 1.“ Unter Verwendung der Fluss-Differentialgleichung $\frac{d}{dt} \varphi_t(p) = X_{\varphi_t(p)}$ und der Kettenregel der Differentiation gilt

$$X_{\psi_t(p)} = \frac{d}{ds} \Big|_0 \varphi_s \psi_t(p) = \frac{d}{ds} \Big|_0 \psi_t \varphi_s(p) = T\psi_t \circ \frac{d}{ds} \Big|_0 \varphi_s(p) = (T\psi_t(X))_p,$$

und da $\psi_t : M \xrightarrow{\sim} M$ ein Diffeomorphismus ist, bekommt man dasselbe Vektorfeld. Kurz gesagt ist X also invariant unter der Diffeomorphismen-Gruppe ψ_t . Verwenden wir dies dann in der Gleichheit

$$[X, Y]_p = \frac{d}{dt} \Big|_0 \overbrace{(T\psi_t(X))}_X = \frac{d}{dt} \Big|_0 X_p = 0$$

so verschwindet die Lie-Klammer, da X_p wegen der Invarianz nicht mehr von t abhängt.

• „1. \Rightarrow 2.“ Die Lie-Klammer der beiden Vektorfelder verschwinde, dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s_0} (T\varphi_s(Y))_p &= \frac{d}{ds} \Big|_0 (T\varphi_{s_0+s}(Y))_p = \frac{d}{ds} \Big|_0 (T\varphi_{s_0} \circ T\varphi_s(Y))_p \\ &= T\varphi_{s_0} \circ \frac{d}{ds} \Big|_0 (T\varphi_s(Y))_p = T\varphi_{s_0}(-[X, Y]_p) = T\varphi_{s_0}(0) = 0, \end{aligned}$$

wobei dieses für alle s_0 gilt. Folglich ist dann die Abbildung $s \mapsto (T\varphi_s(Y))_p$ eine Konstante und damit insbesondere unabhängig von s . Werten wir bei $s = 0$ aus, so erhalten wir wegen $\varphi_0 = \text{Id}$ dann $T(\text{Id})_p = \text{Id}$, und damit $0 \mapsto Y_p$ für die Abbildung. Das Vektorfeld Y ist damit invariant unter φ_s .

Nun zeigen wir die Gleichheit $\varphi_s \psi_t \varphi_{-s}(p) = \psi_t(p)$ der Integralkurve, die für alle p gelten soll. Dazu differenzieren wir einfach beide Seiten und betrachten die Ableitungen, nach dem Eindeutigkeitsatz für Integralkurven müssen beide Seiten dann übereinstimmen. Für die linke Seite gilt

$$\frac{d}{dt} \varphi_s \psi_t \varphi_{-s}(p) = T\varphi_s \frac{d}{dt} \psi_t(\varphi_{-s}(p)) = T\varphi_s Y_{\psi_t \varphi_{-s}(p)}$$

da ψ der Fluss zu Y ist. Nach Definition ist α genau dann eine Integralkurve zu Y , wenn $\alpha'(t) = Y_{\alpha(t)}$ für alle t gilt. Für das obere $\alpha(t)$ gilt dabei $\psi_t \varphi_{-s}(p)$, und wegen der Invarianz von Y unter dem Fluss φ_s folgt dann

$$T\varphi_s Y_{\psi_t \varphi_{-s}(p)} = Y_{\varphi_s \psi_t \varphi_{-s}(p)},$$

also ist $\varphi_s \psi_t \varphi_{-s}$ gemäß $t \mapsto \varphi_s \psi_t \varphi_{-s}(p)$ eine Integralkurve von Y , für die insbesondere

$$0 \mapsto \varphi_s \text{Id} \varphi_{-s}(p) = p$$

gilt. Nach dem Eindeutigkeitsatz für Integralkurven gilt dann $\varphi_s \psi_t \varphi_{-s} = \psi_t$, und damit haben wir den Satz bewiesen. \square

Sei nun X ein Vektorfeld auf M und $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Dann bekommen wir im allgemeinen Fall durch $Tf(X)$ kein Vektorfeld auf N , denn es kann bei einer nicht injektiven Abbildung $f(x) = f(y)$ für $x \neq y$ gelten, sodass f^{-1} nicht eindeutig ist, und wir zwei inkonsistente Möglichkeiten erhalten.

Lemma 34: Seien \tilde{M} und M zwei glatte Mannigfaltigkeiten und $f : \tilde{M} \rightarrow M$ eine glatte Abbildung zwischen diesen. Weiter seien dann \tilde{X} und \tilde{Y} zwei Vektorfelder auf \tilde{M} sowie entsprechend X und Y Vektorfelder auf M , sodass

$$Tf(\tilde{X}_p) = X_{f(p)} \quad \text{und} \quad Tf(\tilde{Y}_p) = Y_{f(p)}$$

gilt. Sind dann $\tilde{\varphi}$ bzw. φ die lokalen Flüsse von \tilde{X} bzw. X , so gelten die folgenden Aussagen:

1. Im Definitionsbereich gilt $f \circ \tilde{\varphi}_t = \varphi_t \circ f$, d.h. f bildet Integralkurven von \tilde{X} in Integralkurven von X ab.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{f} & M \\ \tilde{\varphi}_t \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \varphi_t \\ \tilde{M} & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

2. Es gilt $Tf[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p = [X, Y]_{f(p)}$.

Beweis. Die erste Aussage folgt unmittelbar aus der Eindeutigkeit von Integralkurven. Der Beweis der zweiten Aussage erfolgt durch

$$\begin{aligned} Tf[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p &= Tf \left(-\frac{d}{dt} \Big|_0 T_{\tilde{\varphi}_t}(\tilde{Y}) \right) = -\frac{d}{dt} \Big|_0 T(f \circ \tilde{\varphi}_t)(\tilde{Y}) = -\frac{d}{dt} \Big|_0 T(\varphi_t \circ f)(\tilde{Y}) \\ &= -\frac{d}{dt} \Big|_0 T\varphi_t \circ Tf(\tilde{Y}) = -\frac{d}{dt} \Big|_0 (T\varphi_t(Y))_{f(p)} = [X, Y]_{f(p)}, \end{aligned}$$

wir verwenden also die Beziehung zur Lie-Ableitung aus Proposition 32. □

3 Lie-Gruppen und Faserbündel

Das Verständnis von Lie-Gruppen ist ein wichtiger Baustein der Differentialgeometrie. Im Wesentlichen sind wir dabei an sogenannten Vektorfeldern auf Gruppen interessiert, außerdem wird die Exponentialabbildung von Lie-Algebra nach Lie-Gruppe sowie unterschiedliche Darstellungen eingeführt. Die Wirkung von Lie-Gruppen auf Mannigfaltigkeiten wird uns zum Begriff des Hauptfaserbündels führen, dessen Eigenschaften wir genau studieren. Zuletzt werden zugeordnete Bündel und Rahmenbündel eingeführt, und wir zeigen einen Zusammenhang zwischen Hauptfaser- und Vektorbündeln.

3.1 Lie-Gruppen und links-invariante Vektorfelder

Definition 35: Eine **Lie-Gruppe** G ist eine glatte Mannigfaltigkeit G mit einer Gruppenstruktur, sodass die beiden Gruppenoperationen (bzw. kürzer formuliert

$$G \times G \longrightarrow G \quad (g, h) \mapsto gh^{-1}$$

als kombinierte Inversion und Multiplikation) glatt sind.

Definition 36: Für ein $g \in G$ definiere dann $\ell_g : G \xrightarrow{\cong} G$ durch $h \mapsto gh$ als die linksseitige Multiplikation mit dem Gruppenelement g . Ein Vektorfeld X auf der Lie-Gruppe G heißt **links-invariant** wenn

$$T(\ell_g)X_h = X_{gh}$$

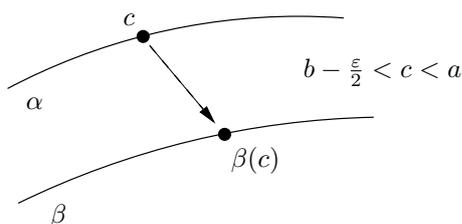
für alle $g, h \in G$ gilt. Für $h = e$ mit e als Einselement folgt damit insbesondere $X_g = T(\ell_g)X_e$.

Bemerkung: Man beachte, dass es eine Bijektion zwischen der Menge der links-invarianten Vektorfelder auf der Lie-Gruppe G und dem Tangentialraum am Einselement gibt, die durch

$$\{\text{links-invariante Vektorfelder auf } G\} \xleftrightarrow{\text{bij.}} T_e G \quad X \mapsto X_e$$

gegeben ist. Außerdem folgt aus der Links-Invarianz zweier Vektorfelder X und Y durch Lemma 34 direkt, dass auch die Lie-Klammer $[X, Y]$ links-invariant ist.

Definition 37: Die Menge $\mathfrak{g} := \text{Lie } G := T_e G$ der Tangentialvektoren am Einselement e zusammen mit der Lie-Klammer bildet die **Lie-Algebra** von G .



Die vorige Definition ist wohldefiniert, denn nach der vorigen Bemerkung entsprechen zwei Vektoren $X, Y \in T_e G$ links-invarianten Vektorfeldern, für die dann die Lie-Klammer $[X, Y]$ definiert ist, welche wiederum ein links-invariantes Vektorfeld liefert, dass wiederum einem Vektor in $T_e G = \mathfrak{g}$ entspricht. So erhalten wir die Lie-Klammer $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$.

Lemma 38: *Jedes links-invariante Vektorfeld ist komplett.*

Beweisidee: Wenn $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow G$ mit $\alpha(0) = e$ eine Integralkurve eines links-invarianten Vektorfelds X ist, dann ist $g\alpha$ ebenfalls eine Integralkurve von X . Folglich kann jede Integralkurve $\beta :]a, b[\rightarrow G$ von X zu einer Integralkurve auf $]a - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}[\rightarrow G$ erweitert werden.

3.2 Exponential-Abbildung

Sei X ein links-invariantes Vektorfeld und φ_t der zugehörige Fluss. Dann kommutiert

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\ell_g} & G \\
 \varphi_t \downarrow & \cong \circlearrowleft & \downarrow \varphi_t \\
 G & \xrightarrow{\ell_g} & G
 \end{array}
 \quad \text{wegen} \quad
 T(\ell_g)X_h = X_{gh} \iff \frac{d}{dt}\Big|_0 \ell_g \circ \varphi_t(h) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \varphi_t \circ \ell_g(h)$$

für alle $g \in G$ und $t \in \mathbb{R}$, d.h. es gilt $g\varphi_t(h) = \varphi_t(gh)$. Außerdem folgt dann insbesondere

$$\varphi_s(e) \cdot \varphi_t(e) = \varphi_t(\varphi_s(e) \cdot e) = \varphi_t(\varphi_s(e)) = \varphi_{s+t}(e) ,$$

d.h. die Abbildung $\alpha_v : \mathbb{R} \rightarrow G$ mit $t \mapsto \varphi_t(e)$ ist ein Gruppen-Homomorphismus, wobei $v = X_e$ entspricht.

Definition 39: Wir nennen $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ mit $v \mapsto \alpha_v(1)$ die **Exponentialabbildung**.

Lemma 40: *Die Exponentialabbildung \exp ist glatt und es gilt $T(\exp)_0 = \text{Id}$.*

Beweis. Für die Glattheit definiere ein glattes Vektorfeld Y auf $\mathfrak{g} \times G$ durch

$$Y_{(v,g)} := (0, T(\ell_g)v) ,$$

dessen Fluss wir mit ϕ_t bezeichnen, dann gilt $\exp(v) = \phi_1(v, e)$. Um die Tangentialabbildung bei Null zu bestimmen, sei ein Lie-Algebra-Element $v \in \mathfrak{g}$ gewählt. Der Fluss des zugehörigen links-invarianten Vektorfelds mit $X_e = v$ sei φ_t . Dann gilt mit der Kettenregel also ist $T(\exp)_0 = \text{Id}$. An der Stelle (*) wird die Skalierungseigenschaft $\alpha_v(t) = \alpha_{tv}(1)$ genutzt, die sich aus $X'_g = T(\ell_g)(tX_e) = tT(\ell_g)X_e = tX_g$ ergibt.

Für die Tangentialabbildung am Nullpunkt betrachte man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 T_0\mathfrak{g} & \xrightarrow{T(\exp)_0} & T_e G \\
 \cong \downarrow & \circlearrowleft & \parallel_{\text{def}} \\
 \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{Id}} & \mathfrak{g}
 \end{array}
 \rightsquigarrow
 \begin{aligned}
 T(\exp)_0(v) &= T(\exp)_0 \circ \frac{d}{dt}\Big|_0 (tv) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \exp(tv) \\
 &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \alpha_{tv}(1) \stackrel{(*)}{=} \frac{d}{dt}\Big|_0 \alpha_v(t) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \varphi_t(e) = X_e = v ,
 \end{aligned}
 \tag{3.0}$$

dann ist die Proposition bewiesen. □

Lemma 41: Zwischen der Lie-Algebra der Gruppe G und der Menge der glatten Gruppen-Homomorphismen $\mathbb{R} \rightarrow G$ existiert eine Bijektion

$$\{\text{glatte Gruppen-Homomorphismen } \alpha : \mathbb{R} \rightarrow G\} \xleftrightarrow{\text{bij.}} \mathfrak{g} \quad \alpha \mapsto \alpha'(0) .$$

Beweis. Die Surjektivität dieser Abbildung haben wir bereits gezeigt, man konstruiere für ein $v \in \mathfrak{g}$ das Vektorfeld des vorigen Beweises, aus dem zugehörigen Fluss ergibt sich wie zu Anfang des Abschnitts dann $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow G$.

Für die Injektivität beachte man, dass jedes α eine Integralkurve von links- und rechts-invarianten Vektorfeldern ist, die durch $\alpha'(0) \in \mathfrak{g}$ festgelegt wird. Dabei ist $r_g(h) = hg$ die Rechts-Multiplikation in Analogie zu ℓ_g . Es gilt dann

$$\alpha'(t_0) = \frac{d}{dt} \Big|_0 \alpha(t + t_0) = \frac{d}{dt} \Big|_0 \overbrace{\alpha(t)\alpha(t_0)}^{r_{\alpha(t_0)} \circ \alpha(t)} = T(r_{\alpha(t_0)})\alpha'(0) ,$$

und unter Verwendung der Eindeutigkeit von Integralkurven folgt die Aussage. □

3.3 Adjungierte Darstellung

Sei G eine Lie-Gruppe, dann definiere für ein Gruppenelement $g \in G$ die Abbildung $c_g : G \rightarrow G$ durch $h \mapsto ghg^{-1}$, diese wird **Adjugation** genannt. Dann ist

$$\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}) \quad g \mapsto T(c_g)_e$$

ein Gruppen-Homomorphismus, die **adjungierte Darstellung** der Gruppe. Die lineare Tangentialabbildung davon liefert

$$\text{ad} := T(\text{Ad})_e : \mathfrak{g} \rightarrow T_{\text{Id}} \text{Aut}(\mathfrak{g}) = \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) ,$$

dies ist die **Adjugation in der Lie-Algebra**. Dies entspricht einer Darstellung der Lie-Algebra, die Abbildung ad führt also die gleiche Operation auf der Darstellung der Lie-Algebra \mathfrak{g} aus, die Ad in der Darstellung der Gruppe G bewirkt.

Lemma 42: Für die Adjugation der Lie-Algebra gilt $\text{ad}(v) \cdot w = [v, w]$ für alle $v, w \in \mathfrak{g}$.

Beweis. Seien $v, w \in \mathfrak{g} = T_e G$ zwei Elemente der Lie-Algebra, d.h. zwei Derivationen der Form $\mathcal{E}_e(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Für einen Funktionskeim $f \in \mathcal{E}_e(G)$ gilt dann

$$(\text{Ad}(g)w)f = (T(c_g)_e w)f = w(f \circ c_g) = \frac{d}{ds} \Big|_0 f(ge^{sw}g^{-1}) ,$$

wobei $f \circ c_g(h) = f(ghg^{-1})$ ist. Für eine Funktion $F(t_1, t_2)$ in zwei Variablen gilt nun allgemein mit der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} \Big|_0 F(t, t) = \frac{\partial F}{\partial t_1}(0, 0) + \frac{\partial F}{\partial t_2}(0, 0) .$$

Beachten wir, dass die Integralkurve $t \mapsto e^{tv} \in G$ bei $t = 0$ den Tangentialvektor $v \in T_e G = \mathfrak{g}$ hat, so folgt nun

$$\begin{aligned} (\text{ad}(v)w)f &= \frac{d}{dt} \Big|_0 (\text{Ad}(e^{tv}))f = \frac{d}{dt} \Big|_0 \frac{d}{ds} \Big|_0 f(e^{tv}e^{sw}e^{-tv}) \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_0 \frac{d}{dt} \Big|_0 f(e^{tv}e^{sw}) + \frac{d}{ds} \Big|_0 \frac{d}{dt} \Big|_0 f(e^{sw}e^{-tv}) \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_0 \frac{d}{dt} \Big|_0 f(e^{tv}e^{sw}) - \frac{d}{ds} \Big|_0 \frac{d}{dt} \Big|_0 f(e^{sw}e^{tv}) = vw f - wv f = [v, w]f , \end{aligned}$$

also erhalten wir das gewünschte $\text{ad}(v)w = [v, w]$. \square

Beispiel: Sei $G = \mathbb{R}^n$ die betrachtete Lie-Gruppe mit der Addition. Die zugehörige Lie-Algebra ist $\mathfrak{g} = T_0\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$. Ein links-invariantes Vektorfeld auf G lässt sich dann durch

$$X = \sum_i a_i \partial_i$$

für Konstanten $a_i \in \mathbb{R}$ darstellen. Die Integralkurven zu diesem Vektorfeld sind affin-lineare Abbildungen $t \mapsto at + b$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ und es gilt $\exp(v) = v$.

3.4 Matrix-Lie-Gruppen

Beispiel: Sei $G = \text{GL}_{\mathbb{R}}(n)$ mit der zugehörigen Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(n) = \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$. Für eine Matrix $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ liefert $X_B = BA$ ein entsprechendes links-invariantes Vektorfeld auf G . Für die Exponentialfunktion von Matrizen gilt hier

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A,$$

wobei für die betrachteten Matrizen $\exp(tA) = e^{tA}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Die Lie-Klammer bzw. die Adjungierte in der Lie-Algebra lässt sich dann formulieren als

$$\text{ad}(A)B = [A, B] = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 e^{tA} B e^{-tA} = AB - BA.$$

Übung: Sei G eine **zusammenhängende Lie-Gruppe**, man zeige dann die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

1. Die Lie-Gruppe G ist abelsch.
2. Für die Lie-Klammer gilt $[v, w] = 0$ für alle $v, w \in \mathfrak{g}$.
3. Es gilt $\exp(v + w) = \exp(v)\exp(w)$ für alle $v, w \in \mathfrak{g}$.

3.5 Wirkung von Lie-Gruppen auf Mannigfaltigkeiten

Definition 43: Sei G eine Lie-Gruppe und P eine glatte Mannigfaltigkeit, dann ist bezeichnen wir eine Abbildung $G \times P \rightarrow P$ als **glatte Wirkung**.

Wir suchen im Folgenden nun nach Bedingungen, wann ein Quotientenraum P/G wieder eine Mannigfaltigkeit ist.

Beispiel: Für $q \in \mathbb{R}$ definieren wir eine Wirkung von \mathbb{R} auf dem Torus $P = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = S^1 \times S^1$ durch

$$t \cdot (x, y) := (x + t, y + qt) \quad \text{für } t, x, y \in \mathbb{R},$$

dies liefert den Fluss eines Vektorfelds auf $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Wenn q rational ist, dann entspricht der Quotient $P/\mathbb{R} = S^1$. Für q irrational dagegen hat P/\mathbb{R} dagegen die indiskrete Topologie, denn der Orbit jeden Punkts liegt dicht in P .

Lemma 44: Sei G eine Lie-Gruppe, P eine glatte Mannigfaltigkeit und $G \times P \rightarrow P$ eine freie,¹ glatte Wirkung. Für einen festen Punkt $p \in P$ definiere

$$\psi : G \rightarrow P \quad g \mapsto gp ,$$

dann ist diese Abbildung ψ eine Immersion.

Beweis. Aufgrund der Kettenregel genügt es zu zeigen, dass $T\psi_0$ injektiv ist, d.h. die Aussage am Nullpunkt zu verifizieren. Sei dazu $v \in \ker(T\psi_0) \subset \mathfrak{g}$ gewählt, dann gilt

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \exp(tv)p = \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \exp(t_0v) \exp(tv)p = \exp(t_0v) \underbrace{\frac{d}{dt} \Big|_0 \exp(tv)p}_{0 \text{ nach Wahl von } v} = 0 ,$$

also ist $\exp(tv)p$ konstant in t . Da die Wirkung der Gruppe G frei ist, folgt dann $\exp(tv) = e$ für alle t , also muss $v = 0$ sein. Damit gilt $\ker(T\psi_0) = \{0\}$, also ist $T\psi_0$ injektiv und damit ψ eine Immersion. \square

3.5.1 Hauptfaser- G -Bündel

Definition 45: Sei G eine (topologische) Gruppe, dann ist X zusammen mit einer rechtsoperierenden Wirkung $X \times G \rightarrow X$ ein **G -Raum**. Analoges gilt auch für eine linksseitige Wirkung. Operiert die Wirkung außerdem frei auf X , so nennen wir X einen **freien G -Raum**.

Definition 46: Ein Bündel (E, π, M) heißt **G -Bündel**, wenn E ein G -Raum ist.

Definition 47: Sei G eine Lie-Gruppe. Ein glattes **Hauptfaser- G -Bündel** bzw. **Prinzipal- G -Bündel** ist ein Quintupel (P, M, π, G, α) , wobei P und M glatte Mannigfaltigkeiten sind, $\pi : P \rightarrow M$ die glatte Bündelprojektion und $\alpha : P \times G \rightarrow P$ eine freie, von rechts operierende Wirkung, sodass für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset M$ und ein Diffeomorphismus $f : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$, eine sogenannte **lokale Trivialisierung**, existieren, sodass zum einen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{f=(\pi, \varphi)} & U \times G \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & U \end{array} \quad \begin{array}{c} \approx \\ \circlearrowright \end{array}$$

kommutiert und die Funktion $f = (\pi, \varphi)$ außerdem **G -äquivariant** ist, d.h. es gilt die Gleichheit $f(xg) = (\pi(x), \varphi(x)g) =: f(x)g$ für alle $x \in \pi^{-1}(U)$ und $g \in G$.

Der Begriff „von rechts operierend“ in der vorigen Definition bedeutet analog zu „von links operierend“ allgemein $p(g_1g_2) = p(g_1)g_2$, im konkreten Fall führt dies zu einem Anti-Homomorphismus $G \rightarrow \text{Diff}(M)$.

Effektiv kommt bei einem Hauptfaser- G -Bündel noch zusätzlich die Forderung nach einer frei operierenden Wirkung hinzu. Um die Unterschiede zu verdeutlichen, sei X ein freier G -Raum, dann definiere den Unterraum

$$\tilde{X} := \{ (x, xs) \in X \times X : x \in X, s \in G \}$$

¹Die Wirkung einer Gruppe $G \times X \rightarrow X$ heißt **frei** wenn aus $gx = x$ für alle $x \in X$ direkt $g = e$ folgt, d.h. nur das Einselement der Gruppe wirkt als Identität auf alle Punkte in X . Die Wirkung einer Gruppe heißt **transitiv**, wenn es nur einen einzigen Orbit gibt, d.h. zwei beliebige Elemente $x, y \in X$ sind durch $x = gy$ miteinander verknüpft. Man beachte, dass eine freie Wirkung nicht automatisch transitiv ist.

aller ineinander durch die Gruppenwirkung übertragbaren Punkte von X . Dann kann auf diesem Raum eine Translationsfunktion $T : \tilde{X} \rightarrow G$ definiert werden, sodass $xT(x, x') = x'$ gilt. Bei einem **Haupt-G-Raum** ist diese Funktion dann stetig, und entsprechend ist bei einem Hauptfaser- G -Bündel (P, M, π, G, α) der Totalraum P ein Haupt- G -Raum.

Definition 48: Sei G eine Lie-Gruppe und P eine Mannigfaltigkeit. Eine stetige, von rechts operierende Wirkung $P \times G \rightarrow P$ heißt **eigentlich**, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subset P$ die Menge

$$G_K := \{g \in G : \text{es existieren } k_1, k_2 \in K \text{ mit } k_1g = k_2\}$$

kompakt in G ist.

An dieser Stelle sei daran erinnert, dass ein metrischer Raum genau dann kompakt ist, wenn er folgenkompakt ist. Außerdem ist jede Mannigfaltigkeit metrisierbar, da sie in einen normierten Vektorraum eingebettet werden kann - dieser kann allerdings unendlich-dimensional sein.

Proposition 49 (Whitney-Hirsch-Einbettungssatz): *Jede glatte n -dimensionale Mannigfaltigkeit kann in \mathbb{R}^{2n} eingebettet werden.*

Satz 50: *Sei G eine Lie-Gruppe und P eine Mannigfaltigkeit. Ist $P \times G \rightarrow P$ eine glatte, freie, eigentliche, von rechts operierende Wirkung, dann gelten die folgenden beiden Eigenschaften:*

1. *Es existiert eine eindeutige Topologie und glatte Struktur auf $M = P/G$, sodass die kanonische Projektion $\pi : P \rightarrow M$ eine submersive glatte Abbildung ist.*
2. *(P, M, G) ist ein Hauptfaser- G -Bündel.*

Bemerkung: • Eine Submersion ist immer eine offene Abbildung, da sie lokal einer Projektion entspricht (Satz vom konstanten Rang einer Abbildung) und Projektionen offene Abbildungen sind.

- Ist $f : M \rightarrow N$ eine surjektive Submersion, dann wird die glatte Struktur auf N bereits von M und f bestimmt: Ist $q : N \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, dann ist q genau dann glatt, wenn $q \circ f$ glatt ist.

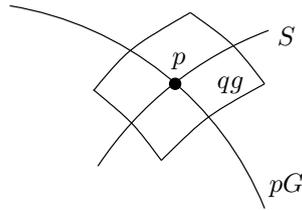
Beweis. 1. Zuerst zeigen wir, dass der Quotientenraum $M = P/G$ hausdorffsch ist. Seien dazu $p, q \in P$ zwei Punkte, die wegen $q \notin pG$ nicht in demselben Orbit liegen. Nehme dann an, dass $p_n, q_n \in P$ und $g_n \in G$ Folgen sind, sodass

$$q_n = p_n g_n \quad \text{und} \quad p_n \rightarrow p, \quad q_n \rightarrow q$$

für $n \rightarrow \infty$ gilt. Da die Wirkung eigentlich ist, lässt sich eine Teilsequenz $\{g_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ finden, sodass g_{n_j} für $j \rightarrow \infty$ gegen $g \in G$ konvergiert. Dann gilt aber $q = pg$, und dies gerade nicht gelten, da p und q nicht im gleichen Orbit liegen. Folglich existieren Umgebungen $U, V \subset P$ von p und q , sodass $U \cap VG \neq \emptyset$ gilt, wobei VG die Vereinigung der Orbits aller Punkte von V bezeichnet.

2. Zum Beweis der lokalen Trivialität wähle einen festen Punkt $p \in P$ und definiere

$$\psi : G \rightarrow P \quad g \mapsto pg .$$



In Lemma 44 haben wir gezeigt, dass ψ eine Immersion ist, also existiert eine Untermannigfaltigkeit $S \subset P$ und ein $p \in S$, sodass

$$T_p P = \text{im}(T\psi_e) \oplus T_p S$$

gilt. Nach dem Satz der inversen Funktion existieren dann Umgebungen $p \in U \subset S$ und $e \in W \subset G$, sodass die Abbildung

$$\mu : S \times G \longrightarrow P \quad (q, g) \mapsto qg$$

die Menge $U \times W$ diffeomorph auf eine offene Teilmenge von P abbildet.

Behauptung: $\pi|_U : U \longrightarrow M$ ist eine offene Abbildung.

Beweis: Ist $A \subset U$ offen, dann ist auch $AW \subset P$ offen. Insbesondere gilt $AW \subset \overbrace{AG}^{\text{offen}}$, wobei letzteres eine Vereinigung von offenen Mengen ist. Also ist $\pi^{-1}(\pi(A)) = AG$ genau dann offen, wenn $\pi(A) \subset M$ offen ist, und M hat die Quotiententopologie.

Behauptung: Es existiert eine offene Umgebung $V \subset U$ von p , sodass die Einschränkung $\pi|_V : V \longrightarrow M$ injektiv ist, d.h. insbesondere $\mu : V \times G \longrightarrow VG$ ist bijektiv.

Beweis: Wäre dies nicht der Fall, dann gäbe es Folgen $p_n, q_n \in U$ und $g_n \in G \setminus \{e\}$, sodass ähnlich wie im ersten Teil

$$p_n g_n = q_n \quad \text{und} \quad p_n \rightarrow p, \quad q_n \rightarrow q$$

für $n \rightarrow \infty$ gilt. Da die Menge $K = \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{p\}$ kompakt ist, können wir annehmen, dass eine entsprechende Teilmenge (gegebenenfalls nach Umbenennung der Indizes) gemäß $g_n \rightarrow g$ für $n \rightarrow \infty$ konvergiert. Dann gilt

$$pg = \lim_{p_n g_n} = \lim q_n = p,$$

also gilt $g = e$. Für n groß genug liegen dann die $g_n \in W$, und wegen der Injektivität von μ folgt aus $p_n g_n = q_n e$ dann $p_n = q_n$ und $g_n = e$, was aber nach der Voraussetzung gerade nicht der Fall sein soll.

Als offene injektive Abbildung ist $\pi|_V$ ein Homöomorphismus auf sein Bild und damit M eine topologische Mannigfaltigkeit. Ebenso ist $\mu : V \times G \longrightarrow P$ ein lokaler Diffeomorphismus, und deshalb $\mu : V \times G \longrightarrow VG$ ist ein Diffeomorphismus, also ist μ lokal frei. Die Familie aller solcher Karten $\{\pi|_V\}$ bildet dann einen glatten Atlas für M , also kommutiert

$$\begin{array}{ccc} V \times G & \xrightarrow[\approx]{\mu} & \pi^{-1}(V) \subset P \\ & \searrow \pi \circ \Gamma_1 & \swarrow \pi \\ & \pi(V) \subset M & \end{array} \quad \circlearrowleft$$

Damit haben wir gezeigt, dass $P \xrightarrow{\pi} M$ ein Hauptfaser- G -Bündel ist. □

Korollar 51: Eine glatte, freie, von rechts operierende Wirkung $P \times G \rightarrow P$ definiert ein Hauptfaser- G -Bündel genau dann, wenn die Wirkung eigentlich ist.

Beweis. • „ \Rightarrow “: Haben wir gerade ausführlich bewiesen.

• „ \Leftarrow “: Sei $K \subset P$ kompakt, dann gibt es für jedes $g \in G_K$ nach Definition der Menge Elemente $k_1, k_2 \in K$ mit $k_1 g = k_2$. Sei dann $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in G_K , entsprechend existieren Folgen $\{k_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{k_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$, sodass

$$k_n^1 g_n = k_n^2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt. Da K kompakt ist, existieren konvergente Teilfolgen, sodass (nach Umbenennung der Indizes) $k_n^1 \rightarrow k^1 \in K$ und $k_n^2 \rightarrow k^2 \in K$ konvergiert. Entsprechend gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n^1 g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n^2 \iff k^1 g = k^2,$$

also liegt $g := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \in G_K$, da die erforderliche Bedingung für die Elemente dieser Menge erfüllt ist. \square

Übung: Sei G eine Lie-Gruppe und $H \subset G$ eine **abstrakte Untergruppe**, d.h. H ist nur eine Untergruppe von G , aber keine Untermannigfaltigkeit (und damit keine Unter-Lie-Gruppe). Man zeige dann, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:

1. Die Untergruppe H ist abgeschlossen.
2. H ist eine Untermannigfaltigkeit.
3. Die Gruppe H wirkt eigentlich von rechts auf G .

3.5.2 Isotropie-Gruppe und Lie-Gruppen als Quotientenräume

Definition 52: Sei $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe, dann wird der Quotientenraum G/H als **homogener Raum** bezeichnet. Wenn $H \subset G$ eine normale Untergruppe² ist, dann ist G/H eine Lie-Gruppe.

Proposition 53: Für eine glatte, transitive, von links operierende Wirkung $G \times M \rightarrow M$ und einen Punkt $p \in M$ definiere die **Isotropie-Gruppe** als

$$\text{stab}_p(G) := G_p := \{g \in G : gp = p\},$$

dies ist eine abgeschlossene Untergruppe von G . Dann ist $f : G/G_p \rightarrow M$ mit $gG_p \mapsto gp$ ein Diffeomorphismus.

Beweis. Definiere $\psi : G \rightarrow M$ durch $g \mapsto gp$, sodass das folgende zugehörige Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\psi} & M \\ & \searrow \pi & \nearrow f \\ & G/G_p & \end{array}$$

²Eine **normale Untergruppe** $H \subset G$ erfüllt die Ähnlichkeitstransformation $gHg^{-1} = H$ für alle $g \in G$. Normale Untergruppen werden auch als **Normalteiler** bezeichnet und manchmal durch $H \triangleleft G$ notiert.

kommutiert. Für ein $v \in \mathfrak{g}$ sei die Tangentialabbildung $T\psi_e(v) = 0$, dann gilt $\exp(tv)p = p$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also liegt $\exp(tv) \in G_p$ für alle t . Folglich muss $v \in \text{Lie } G_p = \ker(T\pi_e)$ liegen, also ist f immersiv bei $[e] = eG_p \in G/G_p$.

Da f zudem G -äquivariant ist (G wirkt auf G/G_p von links) folgt, dass f eine Immersion ist und damit eine Bijektion. Wenn $\dim G/G_p < \dim M$ wäre, dann könnte f nicht surjektiv sein, also muss $\dim G/G_p = \dim M$ sein. Nach dem Satz von der inversen Funktion ist f dann ein Diffeomorphismus. \square

3.5.3 Beispiele für Quotienten-Lie-Gruppen

Beispiel: 1. Die Lie-Gruppe $G = \text{SO}(n)$ wirkt transitiv auf die S^{n-1} für $n \geq 1$. Für den Nordpol $p = (0, \dots, 0, 1) \in S^{n-1}$ dieser Sphäre ist $G_p = \text{SO}(n-1)$ die Isotropie-Gruppe, also gilt nach dem letzten Satz

$$S^{n-1} = \text{SO}(n)/\text{SO}(n-1) = \text{O}(n)/\text{O}(n-1).$$

2. Analog wirkt die $\text{SU}(n)$ transitiv auf $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ für $n \geq 2$, sodass hier dann

$$S^{2n-1} = \text{SU}(n)/\text{SU}(n-1) = \text{U}(n)/\text{U}(n-1)$$

gilt. Für $n = 2$ erhält man wegen $\text{SU}(1) = \{1\}$ insbesondere $S^3 \cong \text{SU}(2)$.

3. Betrachten wir den komplexen projektiven Raum $\mathbb{C}\mathcal{P}^{n-1} = S^{2n-1}/\text{U}(1)$ mit $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$. An dieser Stelle sei bemerkt, dass kompakte Gruppen immer eigentlich wirken. Wir können $\mathbb{C}\mathcal{P}^{n-1}$ als Menge aller komplexen Linien (gewissermaßen also Ebenen) in \mathbb{C}^n betrachten. Die $\text{SU}(n)$ wirkt für $n \geq 2$ dann transitiv auf $\mathbb{C}\mathcal{P}^{n-1}$, und es die Isotropie-Gruppe ist durch $\text{U}(n-1)$ gegeben. Also erhalten wir

$$\mathbb{C}\mathcal{P}^{n-1} = \text{SU}(n)/\text{U}(n-1)$$

für $n \geq 2$. Für den Spezialfall $n = 2$ folgt insbesondere $\mathbb{C}\mathcal{P}^1 = \text{SU}(2)/\text{U}(1) = S^3/S^1 = S^2$. Man bezeichnet die Sequenz $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$ dann als **Hopf-Faserung**.

4. Mit $\mathbb{H} := \{a + ib + jc + kd : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ sei der Schief-Körper der **Quaternionen** bezeichnet, wobei die drei imaginären Einheiten die Eigenschaften

$$ij = -ji, \quad jk = -kj, \quad ik = -ki \quad \text{und} \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

erfüllen. Mit $\mathbb{H}_0 := \{h = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} : a = 0\}$ bezeichnen wir die Quaternionen mit verschwindendem Realteil. Die komplexe Konjugation in \mathbb{H} ist durch

$$\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk$$

erklärt, wobei $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2} \overline{q_1}$ und $\overline{q\bar{q}} = q\bar{q}$ gelten, letzteres impliziert insbesondere, dass $q\bar{q}$ immer reell ist. Die Länge eines Quaternions ist dann durch $|q| := \sqrt{q\bar{q}}$ definiert, insbesondere gilt $|q_1 q_2| = |q_1| \cdot |q_2|$. Durch

$$\text{Sp}(1) := \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$$

erhalten wir eine weitere Lie-Gruppe, welche die Menge der Einheitsquaternionen enthält. Deren zugehörige Lie-Algebra ist $\mathfrak{sp}(1) := \text{Lie } \text{Sp}(1) = \mathbb{H}_0$. Weiter sei $\text{Ad}_q(v) = qvq^{-1}$ die Adjugations-Abbildung, wobei insbesondere $|qvq^{-1}| = |v|$ gilt, also ist

$$\text{Ad} : \text{Sp}(1) \rightarrow \text{SO}(3)$$

ein Gruppen-Homomorphismus mit $\ker \text{Ad} = \{\pm i\}$. Man beachte dann, dass sich die Multiplikation zweier Quaternionen als $v, w \in \mathbb{H}_0$ als $vw = -\langle v, w \rangle + v \times w$ darstellen lässt. Ist weiter $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{H}_0$ eine orthogonale Basis, dann nimmt für $q = \cos t + \sin t \cdot e_1$ die Adjugation die explizite Form

$$\text{Ad}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2t & -\sin 2t \\ 0 & \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}$$

an, also ist $\text{Ad} : \text{Sp}(1) \rightarrow \text{SO}(3)$ surjektiv. Ad ist damit eine transitive Wirkung von $\text{Sp}(1)$ auf S^2 mit der Isotropie-Gruppe $\text{U}(1)$, sodass insbesondere

$$S^2 = \text{Sp}(1)/\text{U}(1)$$

folgt, dies liefert außerdem eine weitere Beschreibung der Hopf-Faserung. Weiter wirkt $\text{Sp}(1)$ von links auf \mathbb{C}^2 , dies liefert die Isomorphie $\text{Sp}(1) \xrightarrow{\cong} \text{SU}(2)$, welche für zwei komplexe Zahlen $a, b \in \mathbb{C} \cap \text{Sp}(1)$ dann die Matrizendarstellung der Quaternionen gibt:

$$a + bj \mapsto \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} .$$

3.6 Zugeordnete Bündel

Sei $P \xrightarrow{\pi} M$ ein Hauptfaser- G -Bündel, F eine glatte Mannigfaltigkeit und $G \times F \rightarrow F$ eine glatte Wirkung. Dann wirkt G durch

$$(p, f) \cdot g := (pg^{-1}, gf)$$

eigentlich auf $P \times F$, also ist $P \times_G F := (P \times F)/G$ nach Satz 50 eine Mannigfaltigkeit, die zudem durch $P \times_G F \xrightarrow{\pi_F} M$ wieder ein neues Bündel liefert, wie wir sogleich zeigen. Ist $U \subset M$ dann offen und $s : U \rightarrow \pi^{-1}(U) =: P|_U$ ein Schnitt im Bündel, so ist

$$U \times F \xrightarrow{\cong} \pi_F^{-1}(U) \quad (u, f) \mapsto [(s(u), f)]$$

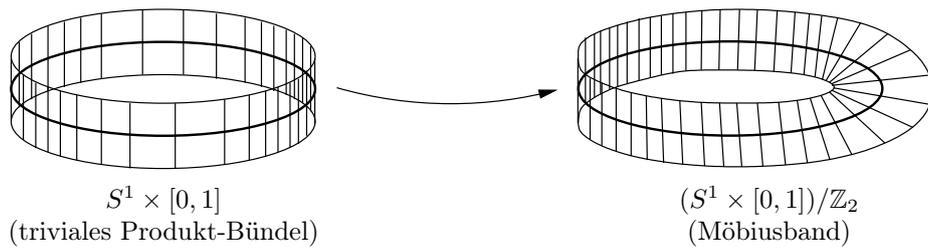
ein Diffeomorphismus und damit eine lokale Trivialisierung von $P \times_G F$.

Definition 54: Das aus $P \xrightarrow{\pi} M$ neu entstandene Bündel $P \times_G F \xrightarrow{\pi_F} M$ wird als **zugeordnetes Faserbündel** zu P und F bezeichnet.

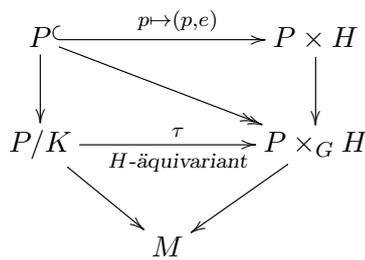
Beispiel: 1. Für ein triviales Hauptfaser- G -Bündel $P = M \times G$ und eine glatte Mannigfaltigkeit F mit glatter Wirkung ist das zugeordnete Faserbündel einfach

$$(M \times G \times F)/G = M \times F .$$

2. Betrachte das Hauptfaser- $\mathbb{Z}/2$ -Bündel $S^1 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}P^1 \approx S^1$ und den \mathbb{Z}_2 -Raum $F = [0, 1]$ als neue Faser, deren Wirkung durch $(\pm 1)t = \pm t$ für $t \in F$ gegeben ist. Dann ist $S^1 \times_{\mathbb{Z}/2} F$ das Faserbündel, dessen Totalraum dem Möbiusband entspricht. Effektiv verursacht man durch die $\mathbb{Z}/2$ -Wirkung also einen „Twist“ im Totalraum.



3. Sei $P \xrightarrow{\pi} M$ ein Hauptfaser- G -Bündel und $\rho : G \rightarrow H$ ein glatter Gruppen-Homomorphismus, wobei H eine Lie-Gruppe sei. Die Gruppe G wirke gemäß $g \cdot h := \rho(g)h$ für alle $g \in G$ und $h \in H$ von links auf H . Dann ist $P \times_G H$ ein Hauptfaser- H -Bündel über M . Wenn ρ dann surjektiv ist, wobei wir $K := \ker \rho$ bezeichnen, setze $H := G/K$.



Der Quotientenraum P/K ist ein Hauptfaser- $\overbrace{G/K}^H$ -Bündel, wobei $pK \cdot gK = pgK$ gilt. Also ist τ ein Diffeomorphismus.

3.7 Vektorbündel

Definition 55: Ein (glattes) **komplexes Vektorbündel** vom Rang k ist ein Tripel (E, π, M) , wobei E und M zwei glatte Mannigfaltigkeiten mit einer glatten Bündelprojektion $\pi : E \rightarrow M$ sind, außerdem hat jede Faser $E_p := \pi^{-1}(p)$ die Struktur eines komplexen Vektorraums, sodass es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U von p gibt und einen Diffeomorphismus

$$\varphi : U \times \mathbb{C}^k \xrightarrow{\cong} \pi^{-1}(U)$$

dessen Einschränkung auf jede Faser einem linearen Isomorphismus $\{p\} \times \mathbb{C}^k \xrightarrow{\cong} E_p$ entspricht. Für ein **reelles Vektorbündel** gilt analoges, man ersetze \mathbb{C} durch \mathbb{R} in der vorigen Definition.

Beispiel: Das Tangentialbündel TM einer n -dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit ist das klassische Beispiel eines Vektorbündels vom Rang n .

3.8 Rahmen-Bündel

Definition 56: Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein komplexes Vektorbündel vom Rang k . Weiter definieren ein neues Bündel, dessen Fasern über dem Punkt $p \in M$ die Form

$$F(E)_p := \{\text{lineare Isomorphismen } \mathbb{C}^k \xrightarrow{\cong} E_p\}$$

haben, dann bildet der Totalraum

$$F(E) := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times F(E)_p$$

zusammen mit der Bündelprojektion $\tilde{\pi} : F(E) \rightarrow M$ ein sogenanntes **Rahmenbündel**, welches alternativ auch mit $\text{Fr}(E)$ bezeichnet wird.

Wir müssen noch zeigen, dass die obige Definition tatsächlich ein Bündel liefert. Ist dann $\varphi : U \times \mathbb{C}^k \xrightarrow{\cong} \pi^{-1}(U)$ eine lokale Trivialisierung des ursprünglichen Bündels E , dann erhalten wir eine Bijektion

$$\tilde{\varphi} : U \times \text{GL}_k(\mathbb{C}) \rightarrow \tilde{\pi}^{-1}(U) .$$

Wir versehen dann den Totalraum $F(E)$ mit der eindeutigen Topologie und glatten Struktur, die sich aus der Forderung ergibt, dass die Bündelprojektion $\tilde{\pi}$ stetig und jede der oben angegebenen Karten $\tilde{\varphi}$ ein Diffeomorphismus ist. Dann ist $F(E)$ ein Bündel mit der Faser $\text{GL}_k(\mathbb{C})$. Für $u \in F(E)_p$ und $g \in \text{GL}_k(\mathbb{C})$ ist durch

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^k & \xrightarrow{g} & \mathbb{C}^k \xrightarrow{\cong} E_p \\ & \searrow & \uparrow \\ & & ug \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \text{Wirkung: } \begin{array}{l} F(E) \times \text{GL}_k(\mathbb{C}) \rightarrow F(E) \\ (u, g) \mapsto ug \end{array}$$

eine freie Wirkung beschrieben, also ist $F(E)$ ein freies $\text{GL}_k(\mathbb{C})$ -Bündel. Man prüft leicht nach, dass $F(E)$ sogar ein Hauptfaser- $\text{GL}_k(\mathbb{C})$ -Bündel ist, durch das Konzept der Rahmen-Bündel ordnen wir also jedem komplexen k -Vektorbündel ein $\text{GL}_k(\mathbb{C})$ -Bündel zu. Analoge Überlegungen lassen sich auch für reelle Vektorbündel durchführen.

Bemerkung: Es gibt noch einen alternativen Weg, der zu dieser Konstruktion führt: Dabei beginnen wir mit einem Hauptfaser- $\text{GL}_k(\mathbb{C})$ -Bündel $P \xrightarrow{\pi} M$. Dann ist $E = P \times_{\text{GL}_k(\mathbb{C})} \mathbb{C}^k$ ein komplexes Vektorbündel vom Rang k .

Lemma 57: Auf beiden Konstruktions-Wegen findet sich eine Bijektion der Isomorphie-Klassen

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Isomorphie-Klassen von Haupt-} \\ \text{faser-GL}_k(\mathbb{C})\text{-Bündeln über } M \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\text{bij.}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Isomorphie-Klassen von komplexen} \\ \text{Vektorbündeln vom Rang } k \text{ über } M \end{array} \right\} .$$

Beweis. Ein Element von $F(E)_p$ entspricht einem Isomorphismus $\mathbb{C}^k \xrightarrow{\cong} E_p$, also erhalten wir zunächst allgemein durch Einsetzung eine Abbildung

$$\kappa_p : F(E)_p \times \mathbb{C}^k \rightarrow E_p \quad (u, v) \mapsto u(v) ,$$

dies liefert eine Abbildung $\kappa : F(E) \times \mathbb{C}^k \rightarrow E$ gemäß

$$\begin{array}{ccc} F(E) \times \mathbb{C}^k & \xrightarrow{\kappa} & E \\ \downarrow & \nearrow \cong & \\ F(E) \times_{\text{GL}_k(\mathbb{C})} \mathbb{C}^k & & \end{array} .$$

Sei nun $P \xrightarrow{\pi} M$ ein Hauptfaser- $\text{GL}_k(\mathbb{C})$ -Bündel. Elemente der Faser P_x über $x \in M$ liefern lokale Trivialisierungen des zugeordneten Bündels $P_x \times_{\text{GL}_k(\mathbb{C})} \mathbb{C}^k$ in der Form

$$\varphi : P_x \rightarrow \text{Iso}(\underbrace{\mathbb{C}^k, P_x \times_{\text{GL}_k(\mathbb{C})} \mathbb{C}^k}_{\cong \mathbb{C}^k}) \quad u \mapsto (v \mapsto [(u, v)]) .$$

Da diese φ insbesondere $\text{GL}_k(\mathbb{C})$ -äquivariant sind, folgt dann $P \xrightarrow{\cong} F(\underbrace{P \times_{\text{GL}_k(\mathbb{C})} \mathbb{C}^k}_{\text{komplexes } k\text{-Vektorbündel}})$. □

4 Äußere Ableitung und Lie-Ableitung

4.1 Äußere Algebra

4.1.1 Alternierende k -Formen und die äußere Algebra

Definition 58: Seien V und W zwei reelle Vektorräume. Eine beliebige multilineare Abbildung

$$f : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{-fach}} \longrightarrow W$$

für $k \geq 1$ heißt **alternierend**, wenn für eine beliebige Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ gilt:

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sign}(\sigma) \cdot f(v_1, \dots, v_k) .$$

Definition 59: Sei f eine alternierende multilineare Abbildung, dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\tilde{f} : \Lambda^k V \longrightarrow W$, sodass nach der universellen Eigenschaft das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V \times \cdots \times V & \xrightarrow{f} & W \\ & \searrow & \uparrow \tilde{f} \\ (v_1, \dots, v_n) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_n & \xrightarrow{\circlearrowleft} & \Lambda^k V \end{array}$$

kommutiert,¹ wobei das Vektoren-Dachprodukt $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ unter der kanonischen Identifikation $V \cong \Lambda^1 V$ der einzelnen Vektoren zu verstehen ist (siehe nachfolgende Ausführungen). Wir nennen $\Lambda^k V$ den **Raum der alternierenden k -Formen** auf V .

Wenn dann weiter der Vektorraum V die Dimension $\dim V =: n < \infty$ hat und e_1, \dots, e_n eine Basis ist, dann ist eine Basis für $\Lambda^k V$ von der Form $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$ und es gilt $\dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}$. Für $k = 0$ definiere $\Lambda^0 V := \mathbb{R}$, für $k > n$ gilt $\Lambda^k V = 0$ (da notgedrungen zwei Elemente linear abhängig sind und deshalb das alternierende Produkt verschwindet). Außerdem gilt für Dualräume die Beziehung

$$\Lambda^k(V^*) \xrightarrow{\cong} (\Lambda^k V)^*$$

indem wir für Funktionale $\varphi_i \in V^*$ und Vektoren $v_i \in V$ die Eigenschaft

$$(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j))_{i,j=1,\dots,k}$$

fordern. Die Determinante $\det \in \Lambda^n V$ liefert als Prototyp einer alternierenden Multilinearform daher die Dualisierung.

¹Das verwendete **Dach-Produkt** bzw. **äußere Produkt** definiert für $\omega \in \Lambda^r V$ und $\eta \in \Lambda^s V$ eine $(r+s)$ -Form $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{r+s} V$, die in expliziter Form gegeben ist durch

$$\omega \wedge \eta(v_1, \dots, v_{r+s}) := \frac{1}{r!} \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} \text{sign}(\sigma) \cdot \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) \eta(v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)}) .$$

4.2 Kontraktionen und glatte Differentialformen

Lemma 62: Sei V ein reeller Vektorraum und $\varphi \in V^*$ ein Funktional. Für $r \geq 1$ ist dann

$$\begin{aligned} \iota_\varphi : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r\text{-fach}} &\longrightarrow \Lambda^{r-1}V \\ (v_1, \dots, v_r) &\mapsto \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \varphi(v_i) \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_r \end{aligned}$$

eine alternierende Abbildung, wobei „ \widehat{v}_i “ die Auslassung dieses Faktors im alternierenden Dach-Produkt kennzeichnet.

Beweis. Seien $v = (v_1, \dots, v_k) \in V^k$ und $w = (w_1, \dots, w_l) \in V^l$ mit $k + 2 + l = r$ zwei Sätze von Vektoren und $\tilde{v} = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in \Lambda^k V$ bzw. $\tilde{w} = w_1 \wedge \cdots \wedge w_l \in \Lambda^l V$ die entsprechenden alternierenden Formen. Zusammen mit $a, b \in V$ gilt dann

$$\begin{aligned} \iota_\varphi(\tilde{v}, a, b, \tilde{w}) &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \varphi(v_i) \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_k \wedge a \wedge b \wedge \tilde{w} \\ &\quad + (-1)^k \varphi(a) \cdot \tilde{v} \wedge b \wedge \tilde{w} + (-1)^{k+1} \varphi(b) \cdot \tilde{v} \wedge a \wedge \tilde{w} \\ &\quad + \sum_{i=1}^l (-1)^{k+i+1} \varphi(w_i) \cdot \tilde{v} \wedge a \wedge b \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{w}_i \wedge \cdots \wedge w_l \\ &= -\iota_\varphi(\tilde{v}, b, a, \tilde{w}), \end{aligned}$$

unter Vertauschung von $a \leftrightarrow b$. Die Aussage folgt also trivial durch explizites Einsetzen. \square

Über eine entsprechende Identifikation definiert ι_φ eine lineare Abbildung $\iota_\varphi : \Lambda^r V \longrightarrow \Lambda^{r-1} V$ für $r \geq 1$ in der äußeren Algebra. Dabei definieren wir $\iota_\varphi = 0$ für $\Lambda^0 V = \mathbb{R}$, wir erhalten also einen Algebra-Homomorphismus $\iota_\varphi : \Lambda^* V \longrightarrow \Lambda^* V$.

Proposition 63: Die Abbildung $\iota_\varphi : \Lambda^* V \longrightarrow \Lambda^* V$ ist eine Schief-Derivation vom Grad -1 .

Beweis. Man betrachte die mittleren Zeilen des vorigen Beweises, dann gilt

$$\begin{aligned} \iota_\varphi(v, w) &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \varphi(v_i) \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_k \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_l \\ &\quad + \sum_{i=1}^l (-1)^{k+i-1} \varphi(w_i) \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{w}_i \wedge \cdots \wedge w_l \\ &= \left(\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \varphi(v_i) \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_k \right) \wedge w \\ &\quad + (-1)^k v \wedge \left(\sum_{i=1}^l (-1)^{i-1} \varphi(w_i) \cdot w_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{w}_i \wedge \cdots \wedge w_l \right) \\ &= \iota_\varphi(v) \wedge w + (-1)^k v \wedge \iota_\varphi(w) \end{aligned}$$

für $v \in V^k$ und $w \in V^l$, es kann also $(-1)^k$ vor die Summe gezogen werden. \square

Sei E ein reelles Vektorbündel, dann sind sowohl das Dualbündel E^* als auch $\Lambda^k E$ neue Vektorbündel über M , welche die Fasern $(E^*)_p := (E_p)^*$ und $(\Lambda^k E)_p := \Lambda^k(E_p)$ für $p \in M$ haben.

Definition 64: Eine **k-Form** bzw. eine **k-Differentialform** auf M ist ein glatter Schnitt von $\Lambda^k(T^*M) = (\Lambda^k TM)^*$. Mit $\Omega^k(M)$ bezeichnen wir den **Raum der glatten k-Formen** auf M .

Für $M = \mathbb{R}^n$ lässt sich jede k -Form mit dem Dachprodukt und den üblichen kartesischen Koordinaten als Linearkombination in der Form

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} =: \sum_I f_I dx_I$$

darstellen, wobei dx_1, \dots, dx_n gerade die Standardbasis von $(\mathbb{R}^n)^* = (T\mathbb{R}^n)^* = T^*\mathbb{R}^n$ ist - diese Basis ist insbesondere dual zu der Basis $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ von $T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$. Mit

$$\Omega^*(M) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k(M)$$

bezeichnen wir außerdem die **Algebra der glatten Differentialformen**.

Lemma 65: Sei D eine ε -Derivation von $\Omega^*(M)$. Außerdem sei $\psi \in \Omega^*(M)$ mit $\psi|_U = 0$ für $U \subset M$ offen. Dann ist $(D\psi)|_U = 0$, also ist jede Derivation eine lokale Operation.

Beweis. Für einen Punkt $p \in U$ wähle eine glatte Funktion $\beta \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $\beta|_{M \setminus U} \equiv 0$ und $\beta \equiv 1$ in einer Umgebung von p . Dann gilt

$$0 = D(\beta\psi) = D\beta \wedge \psi + \beta D\psi \xrightarrow{\text{bei } p} 0 = D\beta \wedge 0 + 1 \cdot D\psi = D\psi,$$

also folgt $(D\psi)(p) = 0$. □

Definition 66: Für ein glattes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ und eine glatte k -Form $\omega \in \Omega^k(M)$ auf M , also anders ausgedrückt $X \in \Gamma(TM)$ und $\omega \in \Gamma(\Lambda^k(T^*M))$, nennen wir

$$\iota_X \omega \in \Omega^{k-1}(M)$$

die **Kontraktion** von ω bezüglich X , diese ist punktweise sinnvoll definiert.

Lemma 67: Sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum. Für $\omega \in \Lambda^r(V^*) = (\Lambda^r V)^*$ und $v_1, \dots, v_r \in V$ gilt dann $(\iota_{v_1} \omega)(v_2, \dots, v_r) = \omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_r)$.

Beweis. Wegen der Linearität der Abbildung genügt es die Aussage auf den Basiselementen zu zeigen. Sei e_1, \dots, e_n eine Basis von V und $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ die entsprechende duale Basis für V^* , sodass die Beziehung $\tilde{e}_i(e_j) = \delta_{ij}$ gilt. Seien dann weiter $I = (i_1, \dots, i_r)$ und $J = (j_1, \dots, j_r)$ zwei Multiindizes mit $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \leq n$ und $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_r \leq n$, außerdem noch $I^- = (i_2, \dots, i_r)$, dann genügt bereits

$$\begin{aligned} (\iota_{e_{i_1}} \tilde{e}_J)(e_{I^-}) &= \sum_{l=1}^r (-1)^{l-1} \tilde{e}_{i_1}(e_{j_l}) \tilde{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\tilde{e}_{j_l}} \wedge \dots \wedge \tilde{e}_{j_r}(e_{i_2}, \dots, e_{i_r}) \\ \tilde{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \tilde{e}_{j_r}(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) &= \tilde{e}_J(e_I) = \begin{cases} 1 & : I = J \\ 0 & : I \neq J \end{cases} \end{aligned}$$

für die Aussage. □

Korollar 68: In der Situation des vorigen Lemmas gilt $\iota_v \circ \iota_v = 0$.

Proposition 69: Die Kontraktion $\iota_X : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^{*-1}(M)$ ist die eindeutige Schief-Derivation vom graduierten Grad -1 , welche die folgenden drei Eigenschaften erfüllt:

1. Es gilt $\iota_X(f) = 0$ für alle glatten Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(M) = \Omega^0(M)$.
2. Es gilt $\iota_X(\omega) = \omega(X)$ für alle 1-Formen $\omega \in \Omega^1(M)$.
3. Es gilt $\iota_X \circ \iota_X = 0$.

Beweis. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus dem vorigen Lemma, nach dem es genügt die Aussage für Differentialformen im \mathbb{R}^n zu zeigen, welche in der Form $\omega = \sum_I f_I dx_I$ geschrieben werden können. Die Funktionen f_I werden dabei von der ersten Eigenschaft bestimmt, während die 1-Formen dx_i von der zweiten Eigenschaft festgelegt werden. Die Derivations-Produktregel liefert dann, wie alle höheren Differentialformenn zu behandeln sind. Die dritte Eigenschaft ist im vorigen Korollar bereits gezeigt, also folgt die Eindeutigkeit. \square

4.3 Äußere Ableitung

Satz 70: Die Abbildung $d : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^{*+1}(M)$ ist die eindeutige Schief-Derivation vom Grad $+1$, genannt **äußere Ableitung**, welche die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind:

1. Es gilt $df = Tf$ für alle glatten Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(M) = \Omega^0(M)$.
2. Es ist $d \circ d = 0$.

Die Eindeutigkeit ergibt sich dabei analog zur vorigen Proposition bzw. aus dem Lemma. Für $M = \mathbb{R}^n$ und eine r -Form $\omega \in \Omega^r(\mathbb{R}^n) = \Gamma(\Lambda^r(\mathbb{R}^n)^*)$, die wir als Abbildung $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda^r(\mathbb{R}^n)^*$ auffassen, gilt

$$d\omega = \sum_i dx_i \wedge \partial_i \omega \quad \text{mit} \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

Proposition 71: Sei $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten und $\omega \in \Omega^*(N)$. Dann gilt die Natürlichkeit $f^*d\omega = df^*\omega$ der äußeren Ableitung.

4.4 Lie-Ableitung

4.4.1 Die Lie-Ableitung als Verallgemeinerung der Lie-Klammer

Definition 72: Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $\omega \in \Omega^*(M)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein glattes Vektorfeld mit dem lokalen Fluss φ_t . Dann definieren wir

$$(L_X \omega)_p := \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \underbrace{(\varphi_t^* \omega)_p}_{\substack{\text{„Kurve“ in} \\ \Lambda^*(T_p^* M)}}$$

als die **Lie-Ableitung** von ω bezüglich des Vektorfelds X . Man beachte, dass für $\omega \in \Omega^k(M)$ auch die Lie-Ableitung $L_X \omega \in \Omega^k(M)$ liegt.

Diese Lie-Ableitung ist die bereits auf Seite 17 erwähnte Verallgemeinerung auf Tensoren. Man beachte, dass für Funktionen $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$ die Lie-Ableitung wegen

$$\begin{aligned} (L_X f)_p &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\varphi_t^* f)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (f \circ \varphi_t)_p = T f_{\varphi_t(p)} \circ \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \varphi_t(p) = T f_{\varphi_t(p)}(X_p) \Big|_0 \\ &= T f_p(X_p) = X_p f \end{aligned}$$

der Richtungsableitung durch das Vektorfeld entspricht. Eine 1-Form können wir als duales Objekt zu einem Vektorfeld auffassen. Lokal gilt dann für das Pullback im \mathbb{R}^n bezüglich kartesischer Koordinaten

$$\varphi_t^* \omega = \varphi_t^* \left(\sum_i f_i dx_i \right) = \sum_i \varphi_t^*(f_i dx_i) = \sum_i (f_i \circ \varphi_t) \sum_j \frac{\partial(\varphi_t)_i}{\partial y_j} dy_j,$$

und dies lässt sich mit $-(T\varphi_t(Y))$ identifizieren, also erhalten wir wieder das bereits bekannte Resultat. Im Folgenden werden wir nun weitere Eigenschaften der Lie-Ableitung kennenlernen.

Proposition 73: Die Lie-Ableitung $L_X : \Omega^*(M) \hookrightarrow \Omega^*(M)$ ist eine Derivation vom Grad 0 und vertauscht mit der äußeren Ableitung d .

Beweis. 1. Um zu sehen, dass die Lie-Ableitung L_X tatsächlich eine Derivation ist, betrachte

$$\begin{aligned} L_X(\omega \wedge \eta) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\varphi_t^*(\omega \wedge \eta)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 ((\varphi_t^*\omega) \wedge (\varphi_t^*\eta)) \\ &= \left(\left. \frac{d}{dt} (\varphi_t^*\omega) \right) \wedge (\varphi_t^*\eta) \Big|_0 + (\varphi_t^*\omega) \wedge \left(\left. \frac{d}{dt} (\varphi_t^*\eta) \right) \Big|_0 \\ &= \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\varphi_t^*\omega) \right) \wedge \eta + \omega \wedge \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\varphi_t^*\eta) \right) = (L_X\omega) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge (L_X\eta), \end{aligned}$$

der Beweis erfolgt also unter Verwendung der Produktregel der Differentiation und der Definition der Lie-Ableitung.

2. Für die Kommutationseigenschaft $L_X \circ d = d \circ L_X$ betrachte man, dass $[L_X, d]$ eine Schief-Derivation vom Grad 1 ist. Es reicht wegen dem ersten Teil (also der Derivations-Eigenschaft) zu zeigen, dass $[L_X, d]$ auf Funktionen f und auf 1-Formen df für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ verschwindet. Um $[L_X, d] = 0$ zu zeigen, können wir deshalb annehmen, dass $M = \mathbb{R}^n$ gilt, sodass wir

$$\omega = \sum_I f_I dx_I$$

schreiben können. An einem Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ gilt für $L_X(df)$ explizit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_t^*(df))_p &\stackrel{\text{Prop 71}}{=} \frac{\partial}{\partial t} (d(\varphi_t^* f))_p = \frac{\partial}{\partial t} (d(f \circ \varphi_t))_p \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (f \circ \varphi_t) dx_i \right)_p = \left(\sum_i \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial t} (f \circ \varphi_t) dx_i \right)_p \\ \iff (L_X(df))_p &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_0 (f \circ \varphi_t)_p}_{L_X f} dx_i = (d(L_X f))_p, \end{aligned}$$

also kommutiert L_X mit d für Funktionen. Für Differentialformen df betrachte dann

$$(L_X d)(df) = L_X(d^2 f) = 0 \quad \text{und} \quad (dL_X)(df) = ddL_X f = 0 ,$$

dann folgt die Aussage $[L_X, d] = 0$ für Funktion f und 1-Formen df .

Also ist die Lie-Ableitung $L_X : \Omega^*(M) \hookrightarrow \Omega^*(M)$ eine Derivation vom Grad 0, die sich natürlich bezüglich der äußeren Ableitung verhält. \square

4.4.2 Eigenschaften der Lie-Ableitung

Proposition 74: Jede Derivation D von $\Omega^*(M)$ vom Grad 0, die mit der äußeren Ableitung d kommutiert, ist gleich der Lie-Ableitung L_X für ein glattes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Beweis. Als Derivation von $\Omega^*(M)$ ist D insbesondere eine Derivation von $\mathcal{C}^\infty(M) = \Omega^0(M)$, also existiert ein $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit $D(f) = Xf = L_X f$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, für Funktionen stimmt die Aussage bereits.

Definiere dann die Differenz $D' := D - L_X$. Um $D' = 0$ zu zeigen, nehmen wir $M = \mathbb{R}^n$ an, sodass wir eine Differentialformen wieder als

$$\omega = \sum_i f_i dx_i$$

darstellen können. Da D' mit d für Funktionen vertauscht, gilt für die 1-Form lokal

$$\begin{aligned} D' \left(\sum_i f_i dx_i \right) &= \sum_i D'(f_i dx_i) = \sum_i D'(f_i) dx_i + f_i D'(dx_i) \\ &= \underbrace{(D(f_i) - L_X(f_i))}_{Xf_i} dx_i + f_i \underbrace{(D(dx_i) - L_X(dx_i))}_{X(dx_i)} = 0 , \end{aligned}$$

über die Derivationseigenschaft ist die Aussage damit offensichtlich. \square

Proposition 75: Für ein glattes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ ist $L_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d : \Omega^*(M) \hookrightarrow \Omega^*(M)$.

Beweis. Die rechte Seite der Gleichung ist eine Derivation vom Grad 0, welche offensichtlich mit der äußeren Ableitung d vertauscht. Nach der vorigen Proposition gilt dann

$$d \circ \iota_X + \iota_X \circ d = L_Y$$

für ein passendes Vektorfeld $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ aber

$$Yf = L_Y f = (d \circ \iota_X + \iota_X \circ d)f = \iota_X \circ df = df(X) = Xf$$

also folgt $X = Y$. Damit ist die Kommutator-Darstellung $L_X = [d, \iota_X] : \Omega^*(M) \hookrightarrow \Omega^*(M)$ der Lie-Ableitung bewiesen. \square

Proposition 76: Für jede glatte 1-Form $\phi \in \Omega^1(M)$ und $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ erhalten wir

$$d\phi(X, Y) = X \underbrace{\phi(Y)}_{\in \mathcal{C}^\infty(M)} - Y \underbrace{\phi(X)}_{\in \mathcal{C}^\infty(M)} - \phi([X, Y]) \in \mathcal{C}^\infty(M) .$$

Beweis. Durch eine einfache explizite Rechnung

$$\begin{aligned} X\phi(Y) &= L_X\phi(Y) = (L_X\phi)(Y) + \phi(L_XY) = ((d \circ \iota_X + \iota_X \circ d)\phi)(Y) + \phi([X, Y]) \\ &= \underbrace{(d(\iota_X\phi))}_{\phi(X)}(Y) + (\iota_X(d\phi))(Y) + \phi([X, Y]) = Y\phi(X) + d\phi(X, Y) + \phi([X, Y]) . \end{aligned}$$

erhalten wir bereits die Aussage durch entsprechendes Umstellen. \square

Proposition 77: *Es gilt $[L_X, \iota_Y] = \iota_{[X, Y]}$ für zwei glatte Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

Beweis. Es ist klar, dass $[L_X, \iota_Y] : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^{*-1}(M)$ eine Schief-Derivation vom Grad -1 ist. Wie üblich müssen nur zeigen, dass die Aussage für Funktionen und 1-Formen gilt, und für eine Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M) = \Omega^0(M)$ folgt direkt $[L_X, \iota_Y]f = 0 = \iota_{[X, Y]}f$. Sei dann $\phi \in \Omega^1(M)$ eine 1-Form, dann verwenden wir $L_X(\phi(Y)) = (L_X\phi)(Y) + \phi(L_XY) = (L_X\phi)(Y) + \phi([X, Y])$ und erhalten mit

$$\begin{aligned} [L_X, \iota_Y]\phi &= L_X(\iota_Y(\phi)) - \iota_Y(L_X\phi) = L_X(\phi(Y)) + \phi([X, Y]) - (L_X\phi)(Y) \\ &= \phi([X, Y]) = \iota_{[X, Y]}\phi \end{aligned}$$

die Aussage. \square

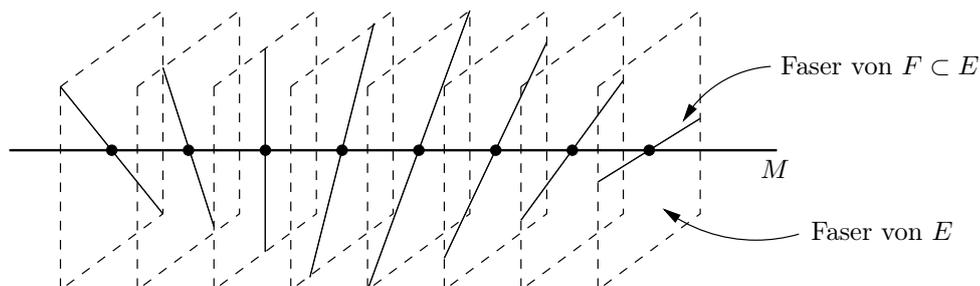
5 Grundelemente der Differentialgeometrie

5.1 Unterbündel und horizontale Distributionen

Definition 78: Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel. Ein **Unterbündel** von E vom Rang k ist eine Untermannigfaltigkeit $F \subset E$, sodass für alle $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset M$ von p sowie lokale Trivialisierungen

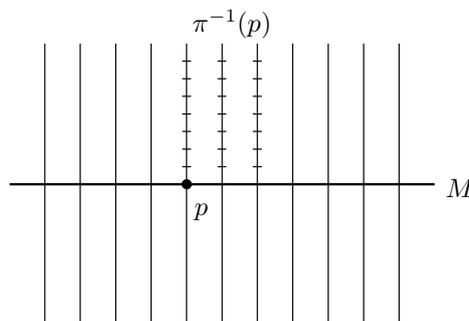
$$\varphi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

des Ausgangsbündels existieren, sodass φ durch Einschränkung auf den Unterbündel-Totalraum einen Diffeomorphismus $F|_U \xrightarrow{\cong} U \times (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ induziert.



Definition 79: Eine **k -dimensionale Distribution** auf einer Mannigfaltigkeit P ist ein Unterbündel $A \subset TP$ vom Rang k . A heißt **involutiv** wenn für zwei Schnitte $X, Y \in \Gamma(A)$ die Lie-Klammer dieser Vektorfelder auf P ebenfalls $[X, Y] \in \Gamma(A)$ liegt.

Definition 80: Wenn $\pi : P \rightarrow M$ eine Submersion ist, dann heißt eine Distribution A in P **horizontal** bezüglich π , wenn die Einschränkung der Tangentialabbildung $T\pi_u$ für jeden Punkt $u \in P$ einen linearen Isomorphismus $A_u \xrightarrow{\cong} T_{\pi(u)}M$ liefert. Dann gilt $T_u P = A_u \oplus V_u$ mit $V_u := T_u(\pi^{-1}(p))$ und $p := \pi(u)$, wobei V_u gerade der Vertikalteil bezüglich π ist.

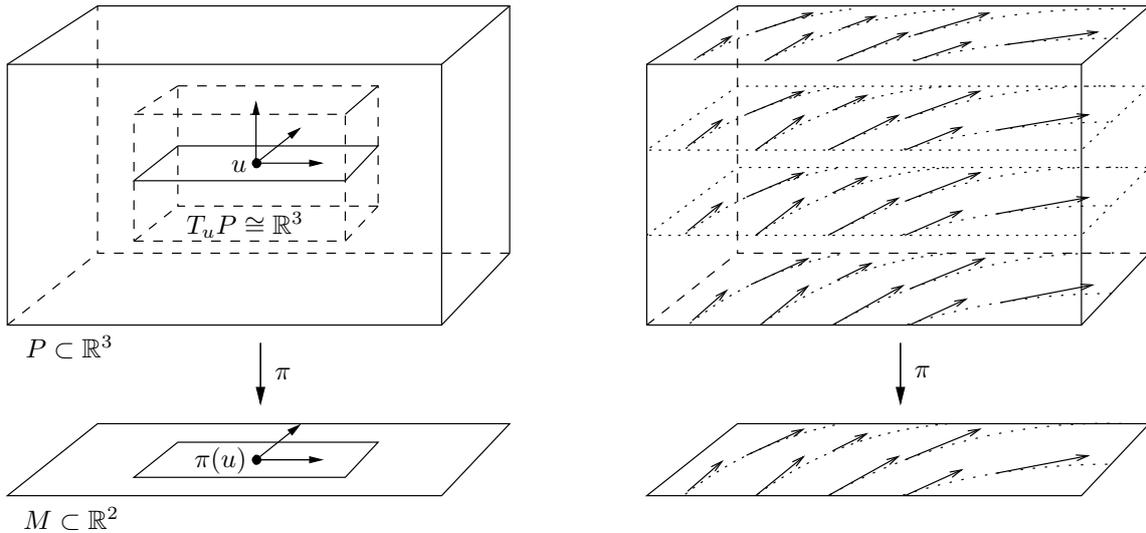


Definition 81: Ist $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein glattes Vektorfeld auf M , dann sei $X^\# \in \mathfrak{X}(P)$ der **horizontale Lift** von X , wobei wir mit der Notation $\pi_* := T\pi$ dann die Definitionsgleichung

$$\pi_* X_u^\# = X_{\pi(u)}$$

für $X^\#$ erhalten.

Jedem Vektor $v \in T_p M$ wird also ein bezüglich π horizontaler Vektor $v^\# \in A_u$ für $u \in \pi^{-1}(p)$ zugeordnet. Mit diesem Werkzeug kehren wir zum ursprünglichen Problem zurück.



5.2 Der Satz von Frobenius

Satz 82 (Frobenius): Eine k -dimensionale Distribution A auf einer Mannigfaltigkeit P ist genau dann involutiv, wenn für jeden Punkt $p \in P$ eine offene Umgebung $U \subset P$ und ein Diffeomorphismus $\varphi : U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ existiert, sodass

$$\varphi_*(A_p) = \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n .$$

Den Beweis des Satzes unterteilen wir in mehrere Schritte, die wir im Folgenden einzeln durchgehen.

Beispiel: Sei $P = \mathbb{R}^2$, dann ist $A_{(x,y)} = \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial x} \in T_{(x,y)} \mathbb{R}^2$ ein Beispiel für eine eindimensionale Distribution. Wegen $T_{(x,y)} \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$ liegt $A_{(x,y)} = \mathbb{R}(1, 0) \subset \mathbb{R}^2$.

Lemma 83: Sei $P = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ und $A_p = \mathbb{R}^k \times \{0\}$, dann ist A involutiv.

Beweis. Für $X \in \Gamma(A)$ und $Y \in \Gamma(A)$ lassen sich die beiden Vektorfelder als

$$X = \sum_{i=1}^k f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad Y = \sum_{j=1}^k g_j \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{5.1}$$

darstellen. In diesem Spezialfall gilt dann für die Lie-Klammer

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \sum_{i,j} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - g_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i,j} f_i \frac{\partial}{\partial g_j} x_i \frac{\partial}{\partial x_j} + f_i g_j \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} - g_j f_i \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_i \sum_j \left(f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

für ein h_i , also ist A involutiv. Im allgemeinen Fall gilt zunächst einmal

$$[fX, Y]g = (fX)Yg - \underbrace{Y(fX)g}_{Y(f \cdot Xg) = YfXg + fYXg} = f[X, Y]g - YfXg,$$

also folgt $[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X$ und $[X, gY] = g[X, Y] + (Xg)Y$. □

Das vorige Lemma beweist die Rückrichtung des Frobenius-Theorems. Um die andere Implikation zu zeigen, verwenden wir die Begriffe des vorigen Abschnitts.

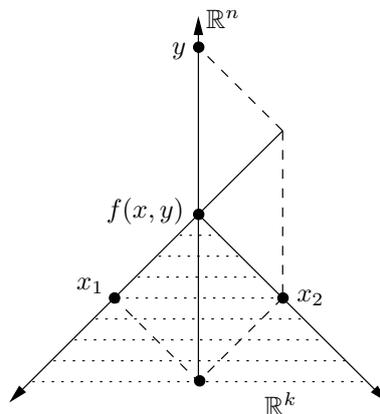
Beweis der zweiten Frobenius-Implikation. Wir können $P = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ annehmen und außerdem, dass die k -dimensionale Distribution A horizontal ist bezüglich der Projektion

$$\text{pr}_2 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

wobei A nach Voraussetzung involutiv ist. Die Vektorfelder $X, Y \in \Gamma(A)$ können wir dann als horizontale Lifts interpretieren, sodass $\partial_i^\#$ die Basiselemente sind. Seien dann $\varphi_t^{(i)}$ die lokalen Flüsse zu den Koordinatenachsen $\partial_i^\#$. Da A involutiv ist, muss $[\partial_i^\#, \partial_j^\#]$ horizontal sein und außerdem

$$\pi_* [\partial_i^\#, \partial_j^\#]_{(x,y)} = [\partial_i, \partial_j]_y = 0$$

gelten, denn nach der Definition von horizontal folgt $[\partial_i^\#, \partial_j^\#] = 0$, also vertauschen die Koordinaten-Flüsse gemäß $\varphi_s^{(i)} \varphi_t^{(j)} = \varphi_t^{(j)} \varphi_s^{(i)}$.



Dann gibt es Umgebung $U \subset \mathbb{R}^k$ von $0 \in \mathbb{R}^k$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ von $0 \in \mathbb{R}^n$, sodass

$$f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \quad (x, y) \mapsto \varphi_{x_1}^{(1)} \circ \dots \circ \varphi_{x_k}^{(k)}(0, y)$$

für $x = (x_1, \dots, x_k)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ wohldefiniert ist. Wir benötigen diese Umgebungen da die Vektorfelder nicht unbedingt komplett sein müssen, d.h. der Fluss ist ebenfalls nicht unbedingt global. Betrachten wir dann die partiellen Ableitungen von f , dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi_{x_1}^{(1)} \circ \dots \circ \varphi_{x_k}^{(k)}(0, y) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi_{x_i}^{(i)} \circ \varphi_{x_1}^{(1)} \circ \dots \circ \widehat{\varphi_{x_i}^{(i)}} \circ \dots \circ \varphi_{x_k}^{(k)}(0, y) \right) = (\partial_i^\#)_{\varphi_{x_1}^{(1)} \circ \dots \circ \widehat{\varphi_{x_i}^{(i)}} \circ \dots \circ \varphi_{x_k}^{(k)}(0, y)}. \end{aligned}$$

Folglich ist $f(\cdot, y)$ eine Immersion und $f(U, y)$ tangential zu A . Für $f(0, y) = (0, y)$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial y_i} f(0, y) = \frac{\partial}{\partial y_i},$$

also ist f ein lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung von 0 , und damit ist dieses f das φ aus dem Satz von Frobenius. \square

Beispiel: Sei $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^n) = \Gamma((\Lambda^1 TM)^*) = \Gamma(T^*M)$ eine glatte 1-Form mit $\alpha_p \neq 0$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$. Der Kern von α ist eine $(n-1)$ -dimensionale Distribution in \mathbb{R}^n , es stellt sich die Frage, wann $\ker \alpha$ involutiv ist. Seien dazu $X, Y \in \Gamma(\ker \alpha)$ zwei Vektorfelder, dann gilt für das Differential

$$d\alpha(X, Y) = X \underbrace{\alpha(Y)}_0 - Y \underbrace{\alpha(X)}_0 - \alpha([X, Y]) = -\alpha([X, Y]).$$

Dann ist $\ker \alpha$ involutiv genau dann, wenn $d\alpha|_{\ker \alpha} = 0$ gilt, d.h. genau dann, wenn $\alpha \wedge d\alpha = 0$ ist. Lokal können wir dabei annehmen, dass $\alpha = dx_1$ ist.

Definition 84: Für den Spezialfall $n = 3$ bezeichnen wir $\ker \alpha$ als **Kontakt-Struktur** auf \mathbb{R}^3 , wenn überall $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ gilt.

5.3 Krümmung horizontaler Distributionen

Sei $\pi : P \rightarrow M$ eine Submersion und A eine horizontale Distribution in P , außerdem seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ zwei glatte Vektorfelder. Dann definieren wir das glatte Vektorfeld

$$\mathcal{F}(X, Y) := [X, Y]^\# - [X^\#, Y^\#] \in \mathfrak{X}(P),$$

das insbesondere $\pi_* \mathcal{F}(X, Y)_u = \pi_* [X, Y]_u^\# - [\pi_* X^\#, \pi_* Y^\#]_u = [X, Y]_{\pi(u)} - [X, Y]_{\pi(u)} = 0$ für alle $u \in P$ erfüllt, also ist $\mathcal{F}(X, Y)$ ein vertikales Vektorfeld.

Lemma 85: Für eine glatte Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und zwei glatte Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ gilt $\mathcal{F}(fX, Y) = f^\# \mathcal{F}(X, Y)$, wobei $f^\# := f \circ \pi$ ist.

Beweis. Unter Verwendung von $[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X$ folgt durch explizite Berechnung

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(fX, Y) &= [fX, Y]^\# - [f^\# X^\#, Y^\#] \\ &= f^\# [X, Y]^\# - (Yf)^\# X^\# - f^\# [X^\#, Y^\#] + (Y^\# f^\#) X^\# \\ &= f^\# [X, Y]^\# - f^\# [X^\#, Y^\#] = f^\# \mathcal{F}(X, Y), \end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{F}(X, Y)$ ist „horizontal-natürlich“ bezüglich glatter Abbildungen. \square

Lemma 86: Für glatte Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ hängt $\mathcal{F}(X, Y)_u$ nur von den Werten von $X_{\pi(u)}$ und $Y_{\pi(u)}$ ab.

Beweis. Wir können $M = \mathbb{R}^n$ annehmen, sodass $X = \sum_i a_i \partial_i$ und $Y = \sum_j b_j \partial_j$ gilt, dann folgt

$$\mathcal{F}(X, Y) = \sum_{i,j} a_i^\# b_j^\# [\partial_i^\#, \partial_j^\#] = \sum_{i < j} [a_i^\#, b_j^\#] [\partial_i^\#, \partial_j^\#],$$

wobei der erste Faktor $[a_i^\#, b_j^\#]$ nur von den Werten $a_i(u)$ und $b_j(u)$ abhängt. □

Definition 87: Die schiefsymmetrische bilineare Abbildung $T_{\pi(u)}M \times T_{\pi(u)}M \rightarrow V_u$, wobei letzteres V_u der vertikale Tangentialraum von P bei u ist, die durch \mathcal{F} definiert, heißt **Krümmung der Distribution A** bei u .

Lemma 88: Die Distribution A ist genau dann involutiv, wenn $\mathcal{F} = 0$ ist.

Beweis. • „ \Rightarrow “: Sei A involutiv und $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, dann ist $\mathcal{F}(X, Y)$ gleichzeitig horizontal und vertikal, verschwindet also.

• „ \Leftarrow “: Sei $\mathcal{F} = 0$, außerdem nehmen wir $M = \mathbb{R}^n$ an. Jedes horizontale Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(P)$ hat die Form $X = \sum_i a_i \partial_i^\#$ für Funktionen $a_i : P \rightarrow \mathbb{R}$. Außerdem haben wir die Identität

$$[a_i \partial_i^\#, b_j \partial_j^\#] = a_i b_j [\partial_i^\#, \partial_j^\#] + c \partial_i^\# + d \partial_j^\#,$$

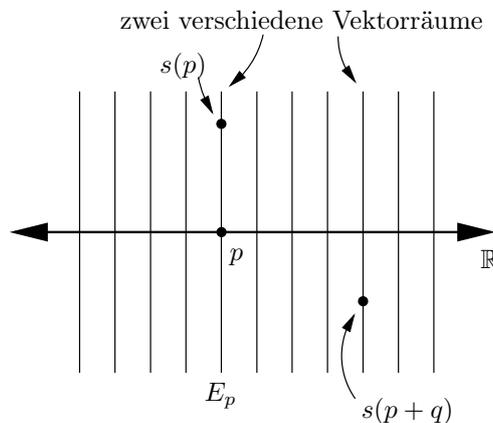
wie durch eine explizite Berechnung direkt folgt. Aus $\mathcal{F} = 0$ folgt dann $[\partial_i^\#, \partial_j^\#] = [\partial_i, \partial_j]^\#$, also ist unter Verwendung obiger Gleichung $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ horizontal, und damit ist A involutiv. □

5.4 Zusammenhänge und kovariante Ableitung

Sei $E \rightarrow M$ ein komplexes Vektorbündel. Für einen gegebenen Schnitt $s \in \Gamma(E)$ und Tangentialvektor $v \in T_p M$ wollen wir nun eine Ableitung „ $\nabla_v s$ “ in E_p definieren, d.h. eine Ableitung von s bezüglich des Vektors v .

Beispiel: Versuchen wir zuerst, was auf $M = \mathbb{R}$ passiert, wenn wir als Ableitung den Grenzwert

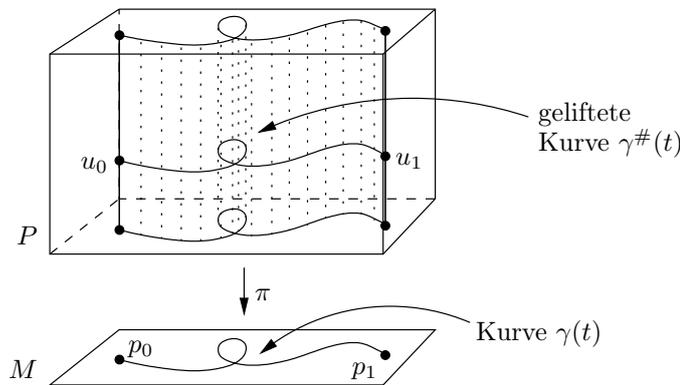
$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{q} (s(p+q) - s(p))$$



verwenden. Wie in der Abbildung gut zu erkennen, besteht dann aber das Problem, dass die Differenz $s(p + q) - s(p)$ nicht definiert ist. Wir müssen also einen anderen Weg gehen.

Überlegen wir uns die Lösung zunächst entlang einer glatten Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$. Wenn wir dann einen gelifteten Punkt $u_0 \in E_{p_0} = \pi^{-1}(p_0)$ über $p_0 = \gamma(0)$ auswählen, so erhalten wir eine eindeutige, glatte, geliftete Kurve $\gamma^\# : [0, 1] \rightarrow E$, die expliziten Ausführungen zur Existenz und Eindeutigkeit sind in [KN63] Kapitel II §3 zu finden. Durch $u_1 := \gamma^\#(1) \in E_{p_1}$ sei außerdem der geliftete Endpunkt der Kurve bezeichnet.

Indem wir dann den gelifteten Startpunkt $u_0 \in E_{p_0}$ variieren, erhalten wir durch den sich entsprechend ändernden Endpunkt u_1 eine Abbildung $E_{p_0} \rightarrow E_{p_1}$ der Fasern über Start- und Endpunkt der Kurve, diese Abbildung nennen wir die **Parallelverschiebung** entlang der Kurve γ . Wir werden dieses Prinzip nun durch die horizontale Liftung eines Vektorfelds (welches Integralkurven und damit Parallelverschiebungen liefert) verallgemeinern.



Sei $P \xrightarrow{\pi} M$ ein Hauptfaser- G -Bündel und $\rho : G \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ eine Darstellung der Gruppe. Dann definieren wir $E := P \times_G \mathbb{C}^n$ als das zu P und \mathbb{C}^n zugeordnete Bündel, wobei die Wirkung von G auf \mathbb{C}^n durch den Gruppen-Homomorphismus ρ bestimmt ist. Dann gibt es eine Bijektion

$$\Gamma(E) \xleftrightarrow{\text{bij.}} \{G\text{-äquivariante Abbildungen } P \rightarrow \mathbb{C}^n\} \quad s \mapsto \tilde{s},$$

wobei G -äquivariant in diesem Fall $\tilde{s}(ug) = g^{-1}\tilde{s}(u)$ für $g \in G$ und $u \in P$ bedeutet. Insbesondere ist $d\tilde{s}$ wohldefiniert. Wir brauchen nun einen kanonischen Weg um Tangentialvektoren $v \in T_{\pi(u)}M$ zu Tangentialvektoren $v_u \in T_uP$ zu liften.

Definition 89: Ein **Zusammenhang** in P ist eine G -invariante horizontale Distribution A des Hauptfaser- G -Bündels P . Dabei bedeutet G -invariant, dass $A_{ug} = (r_g)_*A_u$ für alle $g \in G$ und $u \in P$ gilt.

Für einen Schnitt $s \in \Gamma(E)$ und ein glattes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ ist dann $X^\# \tilde{s} \in \mathfrak{X}(P)$ ein G -invariantes Vektorfeld, d.h. $X^\# \tilde{s}$ entspricht einem Schnitt $\nabla_X s \in \Gamma(E)$, der manchmal auch mit $\nabla_X^A s$ bezeichnet wird. Diese Konstruktion ist punktweise sinnvoll, denn wir erhalten $\nabla_v s \in E_p$ für jeden Vektor $v \in T_pM$.

Definition 90: Die Zuordnung $v \mapsto \nabla_v s$ ist ein Element von $\text{Hom}(T_pM, E_p) \cong T_p^*M \otimes E_p$, wir bezeichnen dann

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes_{\mathbb{R}} E)$$

als die **kovariante Ableitung**.

Beispiel: Betrachten wir noch einmal die Situation entlang einer einzelnen Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$. Wenn $\gamma^\#$ der horizontale Lift nach P ist, dann erhalten wir für jedes fest gewählte $v \in \mathbb{C}^n$ einen horizontalen Lift $\tilde{\gamma} := \gamma^\#(t)v$ von γ in das zugeordnete Bündel $E = P \times_G \mathbb{C}^n$. Für einen Schnitt $s \in \Gamma(E)$ können wir dann die kovariante Ableitung in Richtung $\dot{\gamma}_t := \frac{d}{dt}\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}M$ durch

$$\nabla_{\dot{\gamma}_t} s = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\tilde{\gamma}_t^{t+h}(s(\gamma_{t+h})) - s(\gamma_t) \right]$$

definieren, wobei $\tilde{\gamma}_t^{t+h} : E_{\gamma(t+h)} \xrightarrow{\cong} E_{\gamma(t)}$ die Parallelverschiebung der Faser entlang der Kurve γ beschreibt.

Ist keine Kurve γ vorgegeben, sondern nur eine Ableitungs-Richtung in Form eines Tangentialvektors $v \in T_p M$, dann sei $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ eine beliebige Kurve um p mit $\dot{\gamma}_0 = v$, sodass wir

$$\nabla_v s := \nabla_{\dot{\gamma}_0} s = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\tilde{\gamma}_0^h(s(\gamma_h)) - s(p) \right],$$

erhalten. Dies liefert die kovariante Ableitung von s in Richtung v am Punkt p .

Unsere obige (allgemeinste) Definition der Ableitung von s in Richtung des Vektorfelds $X \in \mathfrak{X}(M)$ erhalten dann durch punktweise Anwendung des vorigen, d.h.

$$(\nabla_X s)(p) := \nabla_{X_p} s = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\tilde{\gamma}_0^h(s(\gamma_h)) - s(p) \right],$$

wobei $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ eine beliebige Kurve durch p mit $\dot{\gamma}_0 = X_p$ ist. Da dies gerade die (lokale) Charakterisierung einer Integralkurve ist, können wir mit dem Fluss φ_t zum Vektorfeld X daher auch

$$(\nabla_X s)(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[(\tilde{\varphi}_0^h(p))(s(\varphi_h(p))) - s(p) \right]$$

schreiben. Letzteres liefert eine recht einfach anzuwendende konkrete Beschreibung der kovarianten Ableitung des Schnitts $s \in \Gamma(E)$ in Richtung $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Dieses neue Differentialoperator ∇ ist einerseits \mathbb{C} -linear und erfüllt die **verallgemeinerte Produktregel**

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f \nabla s$$

für alle glatten Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und Schnitte $s \in \Gamma(E)$.

Definition 91: Für jedes (reelle oder komplexe) Vektorbündel $E \rightarrow M$ definieren wir

$$\Omega^k(M; E) := \Gamma(\Lambda^k(T^*M) \otimes E)$$

als den **Raum der glatten k -Formen auf M mit Werten im Bündel E** .

Ein Element $\varphi \in \Omega^k(M; E)$ ordnet also jedem Punkt $p \in M$ eine alternierende multilineare Abbildung

$$\varphi_p : \underbrace{T_p M \times \cdots \times T_p M}_{k\text{-fach}} \rightarrow E_p$$

zu. Nehmen wir nun noch einmal das zugeordnete Bündel $E = P \times_G \mathbb{C}^n$, dann erhalten wir eine Bijektion

$$\Omega^k(M; E) \xleftrightarrow{\text{bij.}} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi} \in \Omega^k(P; \mathbb{C}^n), \text{ sodass } r_g^* \tilde{\varphi} = g^{-1} \tilde{\varphi} \text{ für alle} \\ g \in G \text{ gilt und } \tilde{\varphi}(v_1, \dots, v_k) = 0, \text{ wenn} \\ \text{mindestens ein } v_i \text{ ein vertikaler Vektor ist} \end{array} \right\} \quad \varphi \mapsto \tilde{\varphi},$$

wobei die Richtung $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ wegen der Zerlegung $T_u P = A_u \oplus V_u$ klar ist. Um umgekehrt von einem $\tilde{\varphi}$ zu φ zu gelangen beachte man, dass $\tilde{\varphi}(v_1, \dots, v_k)$ nur von den horizontalen Tangentialvektoren $\pi_* v_1, \dots, \pi_* v_k$ abhängt, d.h. $\tilde{\varphi}$ ordnet den k glatten Vektorfeldern $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ eine G -äquivalente Abbildung $P \rightarrow \mathbb{C}^n$ zu, also einen Schnitt von E . Die kovariante Ableitung ist also eine Abbildung der Form

$$\nabla : \underbrace{\Omega^0(M; E)}_{\Gamma(E)} \longrightarrow \underbrace{\Omega^1(M; E)}_{\Gamma(T^*M \otimes E)}.$$

5.5 Zusammenhangs-Formen

5.5.1 Zusammenhänge als Differentialformen

Definition 92: Jedes Element $\xi \in \mathfrak{g}$ der Lie-Algebra zur Gruppe G definiert ein Vektorfeld ξ^* auf P , dass an einem Punkt $u \in P$ durch

$$\xi_u^* := \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \underbrace{u \exp(t\xi)}_{\in G} \in T_u P$$

gegeben ist. Definiere eine vom Zusammenhang A in P abhängige 1-Form $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ durch $\omega|_{A_u} = 0$ für alle u und $\omega(\xi_u^*) = \xi$, dann gilt insbesondere $A = \ker \omega$ für den Zusammenhang. Wir bezeichnen ω als die **Zusammenhangs-Form** von A .

Bemerkung: Bezüglich eines Zusammenhang haben wir die bekannte Zerlegung $T_u P = A_u \oplus V_u$ in Horizontal- und Vertikalteil des Tangentialraums. Die Rechtswirkung $\psi : G \rightarrow P$ mit $g \mapsto ug$ induziert über die Tangentialabbildung $T_e(\psi_u) : \mathfrak{g} \rightarrow A_u \oplus V_u$ dann einen Isomorphismus

$$T_e(\psi_u) : \mathfrak{g} \xrightarrow{\cong} V_u.$$

Jeder vertikale Vektor lässt sich also als ξ_u^* für ein passendes $\xi \in \mathfrak{g}$ darstellen.

Lemma 93: Es gilt $r_g^* \omega = \text{Ad}_{g^{-1}} \omega$ für alle $g \in G$ und Zusammenhangs-Formen ω .

Beweis. Die linke und rechte Seite dieser Identität haben den gleichen Kern, denn der Zusammenhang A ist G -invariant. Dann gilt mit der adjungierten Darstellung $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$

$$(r_g)_* \xi_u^* = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 u \exp(t\xi) g = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 u g g^{-1} \exp(t\xi) g = (\text{Ad}_{g^{-1}} \xi)_{ug}^*,$$

sodass wir mit dieser Gleichheit

$$(r_g^* \omega)(\xi_u^*) = \omega((r_g)_* \xi_u^*) = \omega\left((\text{Ad}_{g^{-1}} \xi)_{ug}^*\right) = \text{Ad}_{g^{-1}} \xi = \text{Ad}_{g^{-1}} \omega(\xi_u^*),$$

damit folgt dann die Aussage. □

Bezeichnen wir mit $\mathcal{A}(P) := \{\text{Zusammenhänge auf } P\}$, dann erhalten wir eine Bijektion

$$\mathcal{A}(P) \xleftrightarrow{\text{bij.}} \left\{ \begin{array}{l} \text{1-Formen } \omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g}), \text{ die } \omega(\xi^*) = \xi \text{ für alle} \\ \xi \in \mathfrak{g} \text{ und } r_g^* \omega = \text{Ad}_{g^{-1}}(\omega) \text{ für alle } g \in G \text{ erfüllen} \end{array} \right\} .$$

Sind ω_1 und ω_2 zwei Zusammenhangs-Formen auf P , dann ist die Differenz $\omega_1 - \omega_2 \in \Omega^1(M; \mathfrak{g}_P)$, wobei das Bündel $\mathfrak{g}_P := P \times_G \mathfrak{g}$ durch Anwendung der adjungierten Darstellung von G auf die Lie-Algebra \mathfrak{g} entsteht. Die Menge der Zusammenhänge auf P hat folglich die Form

$$\mathcal{A}(P) = A_0 + \Omega^1(M; \mathfrak{g}_P) , ,$$

die ist für jedes $A_0 \in \mathcal{A}(P)$ ein affiner Vektorraum. Aus diesem Grund werden Zusammenhänge oft auch als **affine Zusammenhänge** bezeichnet.

Beispiel: 1. Betrachte das triviale Bündel $P = M \times G$ mit dem **kanonischen Produkt-Zusammenhang** A_{prod} . Für den Tangentialraum eines kartesischen Produkts gilt allgemein

$$T_{(p,g)}(M \times G) = T_p M \oplus T_g G ,$$

deshalb gilt $A_{(p,g)} = T_p M \times \{0\}$ für den Produkt-Zusammenhang.

2. Sei nun $M = \mathbb{R}^m$ und $P = \mathbb{R}^m \times G$, außerdem sei $\mathfrak{g}_P = \mathbb{R}^m \times \mathfrak{g}$. Jeder Zusammenhang A in P hat dann die Form

$$A = A_{\text{prod}} + \sum_{i=1}^m dx_i \otimes a_i$$

für $a_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathfrak{g}$. Wie sieht der Differentialoperator ∇^A zu diesem Zusammenhang A dann aus? Wir werden diese Frage allgemeiner in Proposition 95 beantworten.

5.5.2 Kovariante Ableitung zu Zusammenhängen

Betrachte nun die G -äquivalente Abbildung $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$. Wird die Gruppe G auf Vektorräumen V und W dargestellt, und ist $S : V \rightarrow W$ eine G -äquivalente lineare Abbildung, dann ist

$$\text{Id} \times S : P \times V \rightarrow P \times W$$

ebenfalls G -äquivalent, und induziert daher einen Homomorphismus von Vektorbündeln

$$S_* : P \times_G V \rightarrow P \times_G W \quad [u, v] \mapsto [u, Sv] .$$

Beispiel: Sei $\rho : G \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ eine n -dimensionale Darstellung der Gruppe G , sodass diese auf $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}^n$ durch $g \cdot (\xi \otimes z) := \text{Ad}_g \xi \otimes \rho(g)z$ wirkt. Dann ist

$$\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \quad \xi \otimes z \mapsto \rho_*(\xi)z$$

eine G -äquivalente Abbildung, wobei $\rho_* := T\rho_e : \mathfrak{g} \rightarrow \text{M}_n(\mathbb{C})$ die zugehörige Darstellung der Lie-Algebra ist. Dies wiederum induziert einen Vektorbündel-Homomorphismus

$$\mathfrak{g}_P \otimes E = P \times_G (\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}^n) \rightarrow E = P \times_G \mathbb{C}^n .$$

Dies definiert ein Element im Vektorbündel $\text{Hom}(\mathfrak{g}_P \otimes E, E)$, also für alle $p \in M$ eine Abbildung $(\mathfrak{g}_P)_p \otimes E_p \rightarrow E_p$.

Lemma 94: Sei V ein Vektorraum und $\tilde{s} : P \rightarrow V$ eine G -äquivalente Abbildung. Weiter sei $\xi \in \mathfrak{g}$ und $\xi^* \in \mathfrak{X}(P)$ das zugehörige Vektorfeld, d.h. wir können

$$\xi_u^* = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 u \exp(t\xi)$$

darstellen. Dann gilt die Identität $\xi^* \tilde{s} = -\xi \tilde{s}$.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch einfaches Einsetzen und Ausrechnen gemäß

$$(\xi^* \tilde{s})(u) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \tilde{s}(\underbrace{u \exp(t\xi)}_{g \in G}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \underbrace{\exp(-t\xi)}_{g^{-1} \in G} \tilde{s}(u) = -\xi \tilde{s}(u) ,$$

damit erhalten wir bereits die Aussage. \square

Um die Wichtigkeit dieses Lemmas zu verstehen, beachte man die Bemerkung von Seite 47.

Proposition 95: Sei V ein Vektorraum und $E = P \times_G V$ das zugeordnete Bündel. Für einen Zusammenhang $A \in \mathcal{A}(P)$ und eine glatte 1-Form $a \in \Omega(M; \mathfrak{g}_P)$ hat die kovariante Ableitung des glatten Schnitts $s \in \Gamma(E)$ die Form

$$\nabla^{A+a}(s) = \nabla^A(s) + as .$$

Ist weiter $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein glattes Vektorfeld, dann gilt mit $a(X) \in \Gamma(\mathfrak{g}_P)$ konkret

$$\nabla_X^{A+a}(s) = \nabla_X^A(s) + a(X)s .$$

Beweis. Sei $A_1 := A$ und $A_2 := A + a$, sowie $X^{\#j}$ der horizontale Lift von X bezüglich des Zusammenhangs (also der horizontalen Distribution) A_j . Wie wir bereits wissen, gibt es eine Bijektion

$$\Gamma(E) \xrightarrow{\text{bij.}} \{G\text{-äquivalente Abbildungen } P \rightarrow V\} \quad s \mapsto \tilde{s} .$$

Für $\nabla_X^{A_j}(s) \in \Gamma(E)$ erhalten wir nach Definition $\widetilde{\nabla_X^{A_j}(s)} = X^{\#j} \tilde{s}$, dann folgt damit

$$\begin{aligned} \left((\nabla_X^{A_2} - \nabla_X^{A_1})(s) \right)^\sim &= \underbrace{(X^{\#2} - X^{\#1}) \tilde{s}}_{\text{vertikal}} \stackrel{(*)}{=} -\omega_j(X^{\#2} - X^{\#1}) \tilde{s} \\ &= \underbrace{(\omega_2 - \omega_1)}_{\tilde{a}}(X^{\#2})(\tilde{s}) = \widetilde{a(X)s} = \widetilde{a(X)s} , \end{aligned}$$

wobei an der Stelle $(*)$ an $\mathfrak{g} \cong V_u$ erinnert sei, dann können wir das vorige Lemma anwenden. Also gilt $(\nabla_X^{A_2} - \nabla_X^{A_1})s = as$, wobei ω_j die Zusammenhangsformen der A_j sind und $\tilde{a} := \omega_2 - \omega_1$ sei. Damit ist die Aussage gezeigt. \square

5.5.3 Zusammenhänge in Vektorbündeln

Definition 96: Sei E ein beliebiges komplexes Vektorbündel über M , dann ist ein **Zusammenhang in E** eine \mathbb{C} -lineare Abbildung

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes_{\mathbb{R}} E) = \Omega^1(M; E) ,$$

welche für alle glatten Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und alle glatten Schnitte $s \in \Gamma(E)$ die verallgemeinerte Produktregel erfüllt:

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f \nabla(s) .$$

Bemerkung: Man beachte, dass ein Zusammenhang in einem Vektorbündel keine kovariante Ableitung ist, auch wenn es zunächst so aussieht. Später in Satz 117 werden wir aber eine Beziehung zwischen Krümmung, Zusammenhang und kovarianter Ableitung zeigen, welche die Notation durch ∇ rechtfertigt.

Lemma 97: Sei $U \subset M$ eine offene Teilmenge und $s \in \Gamma(E)$ ein Schnitt mit $s|_U = 0$, dann gilt auch $(\nabla s)|_U = 0$, d.h. die kovariante Ableitung ist eine lokale Operation.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu dem für Derivationen, wir wählen also wieder eine maskierende Funktion

$$\beta(p) = \begin{cases} 1 & : p \in M \setminus U \\ 0 & : p \in V \subset U \text{ offene Umgebung} \end{cases} ,$$

sodass $\beta s = s$ gilt. Mit der verallgemeinerten Produktregel $\nabla(\beta s) = d\beta \otimes s + \beta \nabla s$ folgt dann am Punkt p

$$\nabla(\beta s)(p) = d\beta(p) \otimes \overbrace{s(p)}^0 + \overbrace{\beta(p)}^0 \nabla s = 0 ,$$

also ist die kovariante Ableitung ebenfalls eine lokale Operation. □

Lemma 98: Wenn ∇ und ∇' zwei Zusammenhänge in E sind und $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dann gilt

$$(\nabla' - \nabla)fs = f(\nabla' - \nabla)s ,$$

also existiert ein $a \in \Omega^1(M; \text{End}(E))$, sodass $(\nabla' - \nabla)s = as$ für alle Schnitte $s \in \Gamma(E)$ gilt.

Beweis. Wir können von einem trivialen Bündel $E = M \times \mathbb{C}^n$ ausgehen, weiter sei e_1, \dots, e_n die Basis von \mathbb{C}^n . Zusammen mit Funktionen $f_1, \dots, f_n : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ gilt dann

$$(\nabla' - \nabla) \sum_i f_i e_i = \sum_i f_i (\nabla' - \nabla) e_i = \sum_i f_i a e_i ,$$

und damit folgt die Aussage. □

Wir erhalten damit, dass die Menge der Zusammenhänge in E ebenfalls ein affiner Vektorraum ist. Genauer formuliert gilt

$$\mathcal{A}(E) := \{\text{Zusammenhänge in } E\} = \nabla^{\text{ref}} + \Omega^1(M, \text{End}(E)) ,$$

denn wir können (entsprechend unserer Ausführungen von Seite 31) das Vektorbündel durch $E := P \times_G \mathbb{C}^n$ ausdrücken, indem wir $P := \text{Fr}(E)$ und $G := \text{GL}_n(\mathbb{C})$ setzen. Damit erhalten wir folglich:

Proposition 99: Wir erhalten eine Bijektion $\mathcal{A}(P) \xleftrightarrow{\text{bij}} \mathcal{A}(E)$ mit $A \mapsto \nabla^A$ zwischen dem affinen Vektorraum der Zusammenhänge im Hauptfaserbündel $P \rightarrow M$ und dem affinen Vektorraum der Zusammenhänge in komplexen Vektorbündel E .

5.6 Krümmung

5.6.1 Krümmung von Zusammenhängen

Sei A ein Zusammenhang in $P \xrightarrow{\pi} M$ und $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ eine Zusammenhangs-Form auf P mit $A := \ker \omega$. Für zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ist dann die Abbildung

$$\omega(\mathcal{F}(X, Y)) : P \longrightarrow \mathfrak{g}$$

eine G -äquivalente Abbildung, d.h. sie definiert einen Schnitt in \mathfrak{g}_P .

Definition 100: Da das bezüglich π vertikale Vektorfeld $\mathcal{F}(X, Y)_u = [X, Y]^\# - [X^\#, Y^\#]$ nur von $X_{\pi(u)}$ und $Y_{\pi(u)}$ abhängt, definiert die Zuordnung $(X, Y) \mapsto \omega(\mathcal{F}(X, Y))$ definiert eine glatte 2-Form $F = F_A \in \Omega^2(M; \mathfrak{g}_P)$. Dann heißt F_A die **Krümmung** des Hauptfaserbündel-Zusammenhangs A .

Definition 101: • Ein Zusammenhang A in P heißt **trivial**, wenn es einen G -äquivalenten Diffeomorphismus $P \xrightarrow{\cong} M \times G$ gibt, welcher A in den kanonischen Produkt-Zusammenhang A_{prod} in $M \times G$ abbildet.

- Der Zusammenhang A heißt **lokal trivial** wenn jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U hat, sodass $A|_U$ trivial ist.
- Wir nennen A **flach** wenn seine Krümmung $F_A = 0$ ist.

Satz 102: Der Zusammenhang A ist genau dann lokal trivial, wenn $F_A = 0$ gilt.

Beweis. • „ \Rightarrow “: Siehe den Beweis des Frobenius-Theorems. (Lemma 88 + Frobenius)

• „ \Leftarrow “: Gilt $F_A = 0$, dann hat nach dem Satz von Frobenius jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U , sodass ein horizontaler Schnitt $s \in \Gamma(P \setminus U)$ existiert. Die Abbildung

$$U \times G \longrightarrow P \setminus U \quad (u, g) \mapsto s(u)g$$

überträgt dann den kanonischen Produkt-Zusammenhang A_{prod} nach A . □

5.6.2 Der Raum der horizontalen vektorwertigen Differentialformen

Betrachte ein Hauptfaser- G -Bündel $P \xrightarrow{\pi} M$ und eine n -dimensionale Darstellung $\rho : G \longrightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Dann erhalten wir ein Vektorbündel $E := P \times_G \mathbb{C}^n$. Jedes $u \in P$ definiert dann mit $x := \pi(u)$ eine Abbildung

$$u : \mathbb{C}^n \xrightarrow{\cong} E_x \quad z \mapsto [u, z] \quad \text{gemäß} \quad \begin{array}{c} (u, z) \in P \times \mathbb{C}^n \\ \left. \begin{array}{c} \downarrow \qquad \downarrow \\ [u, z] \in (P \times \mathbb{C}^n)/G \end{array} \right\} \equiv P \times_G \mathbb{C}^n \end{array} .$$

Außerdem ist $\tilde{\Omega}^k(P; \mathbb{C}^n) = \{G\text{-äquivalente horizontale } \tilde{\varphi} \in \Omega^k(P; \mathbb{C}^n)\}$, wobei in diesem Fall G -äquivalent $r_g^* \tilde{\varphi} = g^{-1} \tilde{\varphi}$ gemäß

$$\underbrace{T_u P \times \dots \times T_u P}_{k\text{-fach}} \xrightarrow{\tilde{\varphi}_n} \mathbb{C}^n \xrightarrow{g^{-1}} \mathbb{C}^n$$

meint und horizontal, dass $\tilde{\varphi}(w_1, \dots, w_k) = 0$ ist, wenn mindestens einer der Tangentialvektoren $w_1, \dots, w_k \in T_u P$ vertikal ist.

Proposition 103: Es gibt einen Vektorraum-Isomorphismus $R : \Omega^k(M; E) \xrightarrow{\cong} \tilde{\Omega}^k(P; \mathbb{C}^n)$, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{T_u P \times \cdots \times T_u P}^{k\text{-fach}} & \xrightarrow{(R\varphi)_u} & \mathbb{C}^n \\ \pi_* \downarrow & \circlearrowleft & \uparrow u^{-1} \\ \underbrace{T_x M \times \cdots \times T_x M}_{k\text{-fach}} & \xrightarrow{\varphi_x} & E_x \end{array}$$

kommutiert, und bei $T_u P$ gilt $R\varphi = u^{-1}\varphi\pi_*$.

- Beweis.* 1. Die Tatsache, dass $R\varphi$ horizontal ist, sieht man wegen π_* direkt.
 2. Weiter gilt auf $T_u P$ dann wegen der G -Invarianz $\pi(ug) = \pi(u)$ der Projektion

$$r_g^* R\varphi = R\varphi \circ (r_g)_* = u^{-1} \varphi \underbrace{\pi_*(r_g)_*}_{\pi_*} = R\varphi .$$

3. Um zu zeigen, dass R eine Bijektion ist, reicht es zu zeigen, dass dies für $P|_U$ auf einer kleinen offenen Menge $U \subset M$ gilt. Sei $\sigma \in \Gamma(P)$ ein Schnitt, dann definieren wir eine Abbildung $S : \tilde{\Omega}^k(P; \mathbb{C}^n) \rightarrow \Omega^k(M; E)$, wobei wir für jede G -äquivalente horizontale k -Form $\psi \in \tilde{\Omega}^k(P; \mathbb{C}^n)$ dann fordern, dass die Abbildung S das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{T_{\sigma(x)} P \times \cdots \times T_{\sigma(x)} P}^{k\text{-fach}} & \xrightarrow{\psi_{\sigma(x)}} & \mathbb{C}^n \\ \sigma_* \uparrow & \circlearrowleft & \cong \downarrow \sigma(x)=u \\ \underbrace{T_x M \times \cdots \times T_x M}_{k\text{-fach}} & \xrightarrow{(S\psi)_x} & E_x \end{array} \rightsquigarrow (S\psi)_x = \sigma(x)\psi_{\sigma(x)}\sigma_*$$

kommutativ macht, dies ist wohldefiniert. Den restlichen Beweisteil unterteilen wir nun noch einmal:

- *Behauptung:* $RS = \text{Id}$. Sei $\psi \in \tilde{\Omega}^k(P; \mathbb{C}^k)$, es reicht die Aussage für einen Punkt in jeder Faser zu zeigen. Auf $T_{\sigma(x)} P$ gilt unter Verwendung von $S\psi = \sigma(x)\psi\sigma_*$

$$RS(\psi) = \sigma(x)^{-1}(S\psi)\pi_* = \sigma(x)^{-1}(\sigma(x)\psi\sigma_*)\pi_* = \psi(\sigma \circ \pi)_* .$$

Für einen Tangentialvektor $w \in T_{\sigma(x)} P$ ist dann $(\sigma \circ \pi)_* w$ vertikal, denn es gilt

$$[\pi_*((\sigma \circ \pi)_* \sigma - \sigma)]w = 0 \iff \sigma_* \pi_* w - w \text{ ist vertikal.}$$

Also gilt $RS\psi = \psi(\sigma \circ \pi)_*$ und damit $RS\psi = \psi$ auf $T_{\sigma(x)} P$, da $RS\psi$ und ψ horizontal sind. Sind v_i vertikale Vektoren, dann folgt $\psi(w_1 + v_1, \dots, w_k + v_k) = \psi(w_1, \dots, w_k)$. Darum gilt $RS\psi = \psi$ überall, da sie G -äquivalent sind.

- *Behauptung:* $SR = \text{Id}$. Sei $\varphi \in \Omega^k(M; E)$ eine glatte k -Form, dann gilt auf $T_x M$

$$SR\varphi = \sigma(x)(\sigma(x)^{-1}\varphi\pi_*)\sigma_* = \varphi \underbrace{(\pi \circ \sigma)_*}_{\text{Id}_*} = \varphi .$$

Also ist S eine Umkehrabbildung zu $R : \Omega^k(M; E) \xrightarrow{\cong} \tilde{\Omega}^k(P; \mathbb{C}^n)$.

Damit ist die Aussage bewiesen. □

5.6.3 Die Struktur-Gleichung

Lemma 104: Sei $P \rightarrow M$ ein Hauptfaser- G -Bündel und $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$, dann gilt $[\xi_1^*, \xi_2^*] = [\xi_1, \xi_2]^*$.

Beweis. Formale Übung. □

Satz 105 (Struktur-Gleichung): Sei ω die Zusammenhangs-Form eines Zusammenhangs A in $P \rightarrow M$, d.h. es gilt $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ und $d\omega \in \Omega^2(P; \mathfrak{g})$. Für alle glatten Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$ gilt dann

$$d\omega(X, Y) = -[\omega(X), \omega(Y)] + \tilde{F}(X, Y),$$

wobei $\tilde{F} \in \tilde{\Omega}^2(P; \mathfrak{g})$ bezüglich der $\Omega^k(M; E) \cong \tilde{\Omega}^k(P; V)$ -Bijektion¹ der Krümmung des Zusammenhangs $F = F_A \in \Omega^2(M; \mathfrak{g})$ entspricht.

Beweis. Der Beweis der Struktur-Gleichung wird in drei Fälle unterteilt, welche unterschiedliche Ausrichtungen der beiden Vektorfelder relativ zum Zusammenhang berücksichtigen.

1. *Horizontal/horizontal:* Seien $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(M)$ zwei glatte Vektorfelder, dann gilt für ihre Lifts in der Krümmung von A

$$\begin{aligned} \omega(\mathcal{F}(Z_1, Z_2)) &= -\omega([Z_1^\#, Z_2^\#]) \stackrel{\text{Prop 76}}{=} d\omega(Z_1^\#, Z_2^\#) - Z_1^\# \underbrace{\omega(Z_2^\#)}_0 - Z_2^\# \underbrace{\omega(Z_1^\#)}_0 \\ &= d\omega(Z_1^\#, Z_2^\#). \end{aligned}$$

Für $v_1, v_2 \in T_u P$ ist dann $\tilde{F}(v_1, v_2) = d\omega(v_1, v_2)$, die Aussage gilt also, wenn Z_1 und Z_2 vertikale Vektorfelder sind.

2. *Horizontal/vertikal:* Sei nun $X \in \Gamma(A)$ horizontal und $Y = \xi^*$ vertikal für ein $\xi \in \mathfrak{g}$. Dann gilt

$$d\omega(X, \xi^*) \stackrel{\text{Prop 76}}{=} X \underbrace{\omega(\xi^*)}_\xi - \xi^* \underbrace{\omega(X)}_0 - \omega([X, \xi^*]) = \omega([\xi^*, X]).$$

Der Fluss des Vektorfelds $Y = \xi^*$ ist durch $\varphi_t(u) = u \exp(t\xi)$ gegeben, also folgt

$$\omega([\xi^*, X]_u) = -\omega\left(\left(\frac{d}{dt}\Big|_0 \underbrace{((\varphi_t)_* X)}_{\substack{\text{Kurve in} \\ T_u P}}\right)_u\right) = -\frac{d}{dt}\Big|_0 \omega\left(\underbrace{((\varphi_t)_* X)}_{\text{horizontal}}\right)_u = 0,$$

d.h. dass die Aussage auch in diesem Spezialfall gültig ist.

¹Der Raum $\tilde{\Omega}^k(P; V)$ ist für $E = P \times_G V$ allgemein über die folgende Bijektion mit $\Omega^k(M; E)$ verknüpft:

$$\Omega^k(M; E) \xleftrightarrow{\text{bij.}} \tilde{\Omega}^k(P; V) := \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi} \in \Omega^k(P; V) \text{ mit } r_g^* \tilde{\varphi} = g^{-1} \tilde{\varphi} \text{ und} \\ \tilde{\varphi}(v_1, \dots, v_k) = 0 \text{ wenn mindestens} \\ \text{ein } v_i \text{ vertikal ist} \end{array} \right\} \quad \varphi \mapsto \tilde{\varphi}.$$

3. *Vertikal/vertikal*: Zuletzt seien $X = \xi_1^*$ und $Y = \xi_2^*$ für $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$ zwei vertikale Vektorfelder, dann gilt unter Verwendung des vorigen Lemmas ähnlich wie zuvor

$$\begin{aligned} d\omega(\xi_1^*, \xi_2^*) &= \underbrace{\xi_1^* \omega(\xi_2^*)}_0 - \underbrace{\xi_2^* \omega(\xi_1^*)}_0 - \omega([\xi_1^*, \xi_2^*]) = -\omega([\xi_1^*, \xi_2^*]) \\ &= -\omega([\xi_1, \xi_2]^*) = -[\xi_1, \xi_2] = -[\omega(\xi_1^*), \omega(\xi_2^*)] . \end{aligned}$$

Der letzte Fall liefert uns dann die Aussage, damit ist der Satz bewiesen. \square

5.7 Äußere kovariante Ableitung

Sei A ein Zusammenhang in $P \xrightarrow{\pi} M$, dann ist es stets möglich den Tangentialraum in $T_u P = V_u \oplus A_u$ zu zerlegen, wobei $V_u = \ker T\pi_u$ gilt. Sei dann $h : T_u P = A_u \oplus V_u \rightarrow A_u$ die Projektion auf den Horizontalteil des Tangentialraums.

Definition 106: Wir definieren dann einen Operator D , der von A abhängt, durch

$$D : \tilde{\Omega}^k(P; \mathbb{C}^n) \rightarrow \tilde{\Omega}^{k+1}(P; \mathbb{C}^n) \quad \tilde{\psi} \mapsto d\tilde{\psi} \circ h ,$$

wobei h den horizontalen Teil ausschneidet, d.h. $d\tilde{\psi} \circ h(w_1, \dots, w_k) = d\tilde{\psi}(hw_1, \dots, hw_k)$. Dies ist offensichtlich horizontal und G -äquivariant (siehe unten).

Bemerkung: Bevor wir uns weiter um diesen neuen Operator kümmern können, ist zu klären, was $d\tilde{\psi}$ ist. Sei e_1, \dots, e_n eine Basis für \mathbb{C}^n , dann gilt $\tilde{\psi} = \sum_i \psi_i e_i$ für $\psi_i \in \Omega^k(P; \mathbb{C})$ und wir können $(d\tilde{\psi})_i := d(\psi_i)$ definieren, wobei letzteres die äußere Ableitung einer glatten k -Form aus Abschnitt 4.3 ist. Selbstverständlich hängt dies nicht von der Wahl der Basis ab.

Wir zeigen nun, dass der Operator $D : \tilde{\Omega}^k(P; \mathbb{C}^n) \rightarrow \tilde{\Omega}^{k+1}(P; \mathbb{C}^n)$ wohldefiniert ist, durch

$$\begin{aligned} r_g^* D\tilde{\psi} &= r_g^*(d\tilde{\psi} \circ h) = d\tilde{\psi} \circ h \circ (r_g)_* = d\tilde{\psi} \circ (r_g)_* \circ h = d(r_g^* \tilde{\psi}) \circ h \\ &= d(g^{-1} \tilde{\psi}) \circ h = g^{-1} d\tilde{\psi} \circ h = g^{-1} D\tilde{\psi} \end{aligned}$$

für $g^{-1} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, also ist D ebenfalls G -äquivariant.

Definition 107: Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel. Wir nennen $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(E)$ eine **Basis von Schnitten** für E , d.h. die Vektoren $s_1(x), \dots, s_n(x)$ bilden eine Basis des Vektorraums E_x für alle Punkte $x \in M$.

Definition 108: Seien $\varphi \in \Gamma(\Lambda^s(T^*M) \otimes E)$ und $\alpha \in \Gamma(\Lambda^r(T^*M))$ zwei glatte Schnitte. Weiter sei $\wedge : \Lambda^r \times \Lambda^s \rightarrow \Lambda^{r+s}$ das alternierende Dach-Produkt. Dann gilt $\varphi = \sum_j \varphi_j s_j$ für glatte s -Formen $\varphi_j \in \Omega^s(M)$, und wir definieren das alternierende **verallgemeinerte Dach-Produkt** $\alpha \wedge \varphi$ als

$$\alpha \wedge \varphi := \sum_j (\alpha \wedge \varphi_j) s_j .$$

Proposition 109: Wir nennen die Abbildung $d_A := R^{-1}D_A R : \Omega^k(M; E) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M; E)$ die **kovariante äußere Ableitung**, die unter Verwendung des Vektorraum-Isomorphismus gemäß

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k(M; E) & \xrightarrow{d_A} & \Omega^{k+1}(M; E) & \Leftarrow & \text{glatte Differentialformen auf } M \text{ mit} \\ & & & & \text{Werten im Vektorbündel } E \\ R \downarrow \cong & \circlearrowleft & \left(S \cong \downarrow R \right) & & \\ \tilde{\Omega}^k(P; \mathbb{C}^n) & \xrightarrow[\tilde{\varphi} \mapsto d\tilde{\varphi} \circ h]{D_A} & \tilde{\Omega}^{k+1}(P; V) & \Leftarrow & \text{horizontale, vektorwertige, } G\text{-äquiva-} \\ & & & & \text{riante Differentialformen auf } P \end{array}$$

entsteht.² Diese ist eine Schief-Derivation vom Grad +1, d.h. sie erfüllt die Identität

$$d_A(\alpha \wedge \varphi) = d\alpha \wedge \varphi + (-1)^r \alpha \wedge d_A \varphi \quad (5.2)$$

für alle $\alpha \in \Omega^r(M)$ und $\varphi \in \Omega^k(M; E)$.

Beweis. Da es sich um eine lokale Aussage handelt können wir annehmen, dass das Bündel P trivial ist, d.h. wir haben einen Schnitt $\sigma \in \Gamma(P)$. Sei $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{C}^n$ die Standardbasis, dann definiere die Schnittbasis $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(E)$ durch $s_j(x) = \sigma(x)e_j \in E_x$, betrachte dabei $u \in P$ als Abbildung $u : \mathbb{C}^n \xrightarrow{\cong} E_{\pi(u)}$.

1. Betrachte S auf den Basis-Elementen. Sei dazu $\psi = \sum_j \psi_j e_j \in \tilde{\Omega}^k(P; \mathbb{C}^n)$ mit $\psi_j \in \Omega^k(P)$. Für Tangentialvektoren $v_1, \dots, v_k \in T_x M$ definiere $\vec{v} = (v_1, \dots, v_k)$, dann gilt

$$(S\psi)\vec{v} = \sigma(x)\psi\sigma_*\vec{v} = \sum_j (\psi_j \sigma_*\vec{v}) s_j(x) = \sum_j (\sigma^*\psi_j)(\vec{v}) s_j(x) ,$$

und damit insbesondere $(S\psi)_j = \sigma^*\psi_j$.

2. Betrachte R auf den Basis-Elementen: Sei $\varphi = \sum_i \varphi_i \otimes s_i \in \Omega^k(M; E)$ eine glatte k -Form mit Werten im Bündel E , deren einzelne Komponenten bezüglich der Schnitt-Basis von der Form $\varphi_i \in \Omega^k(M)$ sind. Für $w_1, \dots, w_k \in T_{\sigma(x)}P$, die wir zu $\vec{w} = (w_1, \dots, w_k)$ zusammenfassen, gilt dann

$$(R\varphi)\vec{w} = \sigma(x)^{-1}\varphi\pi_*\vec{w} = \sigma(x)^{-1} \sum_i \varphi_i(\pi_*\vec{w}) s_i(x) = \sum_i (\pi^*\varphi_i)(\vec{w}) e_i ,$$

also erhalten wir auf $T_{\sigma(x)}P$ damit $(R\varphi)_i = \pi^*\varphi_i$. Folglich ist dann überall

$$\sigma^*(R\varphi)_i = \sigma^*\pi^*\varphi_i = \varphi_i .$$

3. Jetzt überprüfen wir die Schief-Derivations-Eigenschaft (5.2) am Punkt $x \in M$. Dazu wähle einen glatten Schnitt $\sigma \in \Gamma(P)$, der bei x horizontal ist. Dies impliziert für das Bild der Tangentialabbildung im $T\sigma_x = A_{\sigma(x)}$, und es folgt

$$(d_A\varphi)_j = (SDR\varphi)_j = \sigma^*(DR\varphi)_j = \sigma^*(d(R\varphi) \circ h)_j .$$

Am Punkt x gilt insbesondere $(d_A\varphi)_j = \sigma^*(d(R\varphi)_j) = d\sigma^*(R\varphi)_j = d\varphi_j$, da die horizontale Einschränkung h unnötig ist.

²Man beachte, dass D_A nicht den Dirac-Operator meint, sondern lediglich die Abhängigkeit von D vom Zusammenhang A kennzeichnet.

Seien nun $\alpha \in \Omega^r(M)$ und $\varphi \in \Omega^k(M; E)$ wie in der Aussage, dann gilt am Punkt x

$$\begin{aligned}(d_A(\alpha \wedge \varphi))_j &= d((\alpha \wedge \varphi)_j) = d(\alpha \wedge \varphi_j) \\ &= d\alpha \wedge \varphi_j + (-1)^r \alpha \wedge d\varphi_j = (d\alpha \wedge \varphi + (-1)^r \alpha \wedge d\varphi)_j\end{aligned}$$

für alle Komponenten $j = 1, \dots, n$ der äußeren kovarianten Ableitung.

Damit ist d_A eine Schief-Derivation vom Grad $+1$. □

Mit der kovarianten äußeren Ableitung schließen wir zunächst mit der Einführung weiterer Formalismen ab, und betrachten einige praktische Anwendungen.

6 Zusammenhänge in Anwendung

6.1 Bianci-Identität und Krümmung

Satz 110 (Bianci-Identität): Sei A ein Zusammenhang im Hauptfaser- G -Bündel $P \rightarrow M$, dann gilt für die äußere kovariante Ableitung $d_A F_A = 0$.

Beweis. Die 2-Form $F_A \in \Omega^2(M; \mathfrak{g}_P)$ entspricht $\tilde{F}_A \in \tilde{\Omega}^2(P; \mathfrak{g})$. Sei dann e_1, \dots, e_r eine Basis der Lie-Algebra und

$$\omega = \sum_j \omega_j e_j \in \Omega^1(P; \mathfrak{g}) \quad \text{für } \omega_j \in \Omega^1(P)$$

eine Zusammenhangs-Form von A . Die Eigenschaften der Lie-Gruppe G lassen sich durch die Vertauschungsrelationen $[e_j, e_k] = \sum_i c_{jk}^i e_i$ der Basiselemente der Lie-Algebra \mathfrak{g} spezifizieren. Für zwei glatte Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$ gilt dann

$$[\omega(X), \omega(Y)] = \sum_{j,k} \omega_j(X) \omega_k(Y) [e_j, e_k] = \sum_{i,j,k} c_{jk}^i \omega_j(X) \omega_k(Y) e_i .$$

Beachtet man nun weiter die Schiefsymmetrie der Koeffizienten $c_{kj}^i = -c_{jk}^i$, so folgt

$$\begin{aligned} [\omega(X), \omega(Y)]_i &= \sum_{j < k} c_{jk}^i (\omega_j(X) \omega_k(Y) - \omega_k(X) \omega_j(Y)) \\ &= \sum_{j < k} c_{jk}^i (\omega_j \wedge \omega_k)(X, Y) . \end{aligned}$$

Nach der Struktur-Gleichung aus Satz 105 gilt $d\omega(X, Y) = -[\omega(X), \omega(Y)] + \tilde{F}(X, Y)$, dann gilt komponentenweise

$$d\omega_i = - \sum_{j < k} c_{jk}^i \omega_j \wedge \omega_k + \tilde{F}_i ,$$

also folgt mit $0 = d^2\omega_i = - \sum_{j < k} c_{jk}^i (d\omega_j \wedge \omega_k - \omega_j \wedge d\omega_k) + d\tilde{F}_i$ und da die horizontalen Anteile $\omega_j h = \omega_k h = 0$ erfüllen, ist

$$D_A \tilde{F}_i = d\tilde{F}_i \circ h = 0 \iff d_A F_A = 0 .$$

Damit ist die Bianci-Identität bewiesen. □

Als nächsten fragen wir uns nun, wie die Krümmung von einem Zusammenhang abhängt. Sei dazu $P \rightarrow M$ ein Hauptfaser- G -Bündel und $\mathfrak{g}_P = P \times_G \mathfrak{g}$. Jeder Punkt $u \in P$ definiert einen linearen Isomorphismus

$$u : \mathfrak{g} \xrightarrow{\cong} (\mathfrak{g}_P)_x \quad \xi \mapsto [u, \xi] .$$

Für ein Gruppenelement $g \in G$ gilt dann mit $ug \cdot \xi := [ug, \xi] = [u, \text{Ad}_g(\xi)] = u \text{Ad}_g(\xi)$ gemäß

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{ug} & (\mathfrak{g}_P)_x \\ \text{Ad}_g \downarrow & \nearrow u & \\ \mathfrak{g} & & \end{array} .$$

Da Ad_g die Klammer auf der Lie-Algebra \mathfrak{g} erhält, hat $(\mathfrak{g}_P)_x$ die eindeutige Struktur einer Lie-Algebra, sodass $u : \mathfrak{g} \xrightarrow{\cong} (\mathfrak{g}_P)_x$ ein Isomorphismus von Lie-Algebren ist. Die Abbildung

$$\begin{aligned} (\Lambda^r(T^*M) \otimes \mathfrak{g}_P) \otimes (\Lambda^s(T^*M) \otimes \mathfrak{g}_P) &\longrightarrow (\Lambda^{r+s}(T^*M) \otimes \mathfrak{g}_P) \\ (\alpha_1 \otimes \xi_1) \otimes (\alpha_2 \otimes \xi_2) &\mapsto (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \otimes [\xi_1, \xi_2] \end{aligned} \quad (6.1)$$

ist faserweise wohldefiniert und induziert dann eine Abbildung

$$\Omega^r(M; \mathfrak{g}_P) \otimes \Omega^s(M; \mathfrak{g}_P) \longrightarrow \Omega^{r+s}(M; \mathfrak{g}_P) \quad \varphi_1 \otimes \varphi_2 \mapsto [\varphi_1 \wedge \varphi_2] .$$

Satz 111: Sei A ein Zusammenhang in P und $a \in \Omega^1(M; \mathfrak{g}_P)$, dann gilt für die Krümmung des Zusammenhangs $A + a$ die Gleichung

$$F_{A+a} = F_A + d_A a + \frac{1}{2}[a \wedge a] .$$

Diese Beziehung wird oft auch als **zweite Struktur-Gleichung** bezeichnet.

Beweis. Sei $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ eine Zusammenhangsform von A . Dann ist $\omega + \tilde{a}$ für $\tilde{a} \in \tilde{\Omega}^1(P; \mathfrak{g})$ ebenfalls eine Zusammenhangsform, allerdings zum Zusammenhang $A + a$. Aus dem Isomorphismus $\Omega^*(M; E) \cong \tilde{\Omega}^*(P; \mathbb{C}^n)$ für $E = P \times_G \mathbb{C}^n$ folgt nun insbesondere $\Omega^2(M; \mathfrak{g}_P) \cong \tilde{\Omega}^2(P; \mathfrak{g})$, sodass wir zur Krümmung $F_A \in \Omega^2(M; \mathfrak{g}_P)$ eine entsprechende horizontale, G -äquivalente 2-Form $\tilde{F}_A \in \Omega^2(P; \mathfrak{g})$ erhalten.

Nach der (ersten) Strukturgleichung gilt für zwei glatte Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$ dann

$$\tilde{F}_A(X, Y) = d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] \in \tilde{\Omega}^2(P, \mathfrak{g}) ,$$

und damit für den modifizierten Zusammenhang $A + a$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{A+a}(X, Y) &= d\omega(X, Y) + d\tilde{a}(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] \\ &\quad + [\omega(X), \tilde{a}(Y)] + [\tilde{a}(X), \omega(Y)] + [\tilde{a}(X), \tilde{a}(Y)] \end{aligned}$$

Sind X und Y beide A -horizontal, dann ist insbesondere $\omega(X) = \omega(Y) = 0$, sodass sich voriges Ergebnis zu

$$\tilde{F}_{A+a}(X, Y) = \tilde{F}_A(X, Y) + d\tilde{a}(X, Y) + [\tilde{a}(X), \tilde{a}(Y)]$$

verkürzt. Lokal lässt sich nun ein glatter Schnitt $s \in \Gamma(P|_U)$ auf der offenen Teilmenge $U \subset M$ finden. Ist $x \in U$ ein Punkt, $v, w \in T_x M$ zwei Tangentialvektoren, $u := s(x)$ und der Schnitt s am Punkt x horizontal bezüglich A , also $\text{im}(Ts_x) = A_u$, dann folgt

$$\begin{aligned} F_{A+a}(v, w) &= u\tilde{F}_{A+a}(s_*v, s_*w) = u\left(\tilde{F}_A(s_*v, s_*w) + d\tilde{a}(s_*v, s_*w) + [\tilde{a}(s_*v), \tilde{a}(s_*w)]\right) \\ &= F_A(v, w) + d_A a(v, w) + [u\tilde{a}(s_*v), u\tilde{a}(s_*w)] \\ &= F_A(v, w) + d_A a(v, w) + [a(v), a(w)] . \end{aligned}$$

Stellen wir dann $a_x = \sum_j a_j \otimes \xi_j$ mit $\alpha_j \in T_x^*M$ und $\xi_j \in (\mathfrak{g}_P)_x$ dar, so folgt mit dem obem definierten Dachprodukt tensorierter Formen $[a \wedge a] = \sum_{i,j} (\alpha_i \wedge \alpha_j) \otimes [\xi_i, \xi_j]$ und damit

$$\begin{aligned} [a \wedge a](v, w) &= \sum_{i \neq j} (\alpha_i(v)\alpha_j(w) - \alpha_i(w)\alpha_j(v)) \otimes [\xi_i, \xi_j] = \sum_{i \neq j} [a_i(v), a_j(w)] \otimes [\xi_i, \xi_j] \\ &= 2 \left[\sum_i a_i(v)\xi_i, \sum_j a_j(w)\xi_j \right] = 2[a(v), a(w)] , \end{aligned}$$

sodass wir die Additionsformel für F bewiesen haben. □

Beispiel: Sei $M = \mathbb{R}^n$ und $P = \mathbb{R}^n \times G$ das Hauptfaser- G -Bündel. Weiter sei A_0 der kanonische Produkt-Zusammenhang und $a = \sum_{i=1}^n dx_i \otimes a_i$ für $a_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}_P = \mathbb{R}^n \times \mathfrak{g}$. Letztere Abbildung können wir auch einfach als $a_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$ auffassen. Dann gilt für die Krümmung

$$F_{A_0+a} = F_{A_0} + d_{A_0}a + \frac{1}{2}[a \wedge a] = 0 + da + \frac{1}{2}[a \wedge a] .$$

Insbesondere verschwindet die Krümmung $F(A_0)$ des kanonischen Produkt-Zusammenhangs, dieser ist also flach.

Betrachten wir nun die kovariante äußere Ableitung $d_A : \Omega^r(M; \mathfrak{g}_P) \rightarrow \Omega^{r+1}(M; \mathfrak{g}_P)$. Da diese eine Schief-Derivation ist, gilt allgemein für eine glatte r -Form $\alpha \in \Omega^r(M)$ und einen Schnitt $s \in \Gamma(\mathfrak{g}_P)$ gilt

$$d_A(\alpha \otimes s) = d\alpha \otimes s + (-1)^r \alpha \wedge d_A s ,$$

also folgt für die vorige Krümmung des Beispiels

$$\begin{aligned} F_{A_0+a} &= -dx_j \wedge da_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (dx_i \wedge dx_j) \otimes [a_i, a_j] \\ &= -dx_j \wedge \sum_i dx_i \otimes \partial_i a_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (dx_i \wedge dx_j) \otimes [a_i, a_j] \\ &= \sum_{i < j} (dx_i \wedge dx_j) \otimes (\partial_i a_j - \partial_j a_i + [a_i, a_j]) . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $F_{ij} = \partial_i a_j - \partial_j a_i + [a_i, a_j]$ als (lokale) **Komponentendarstellung der Krümmung** des modifizierten Zusammenhangs bezüglich kartesischer Koordinaten.

6.2 Komplexe Linien-Bündel, erste Chern-Klasse

Sei $P \xrightarrow{\pi} M$ ein Hauptfaser- G -Bündel, V ein Vektorraum und $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ eine Darstellung der Bündelgruppe G . Außerem sei A ein Zusammenhang und wie üblich $E := P \times_G V$ das zugeordnete V -Vektorbündel.

Ist dann $v \in V$ ein fest gewählter Vektor, dann ist $\tilde{s} : P \rightarrow V$ mit $\tilde{s} := v$ eine G -äquivalente Abbildung und definiert deshalb einen Schnitt in $s \in \Gamma(E)$, wobei insbesondere $\nabla^A(s) = 0$ gilt, da \tilde{s} konstant ist. Wirkt die Gruppe G trivial auf den Vektorraum V , dann gilt die Zuordnung

$$E = P \times_G V = M \times V \quad \nabla^A \mapsto d .$$

Sei nun $L \rightarrow M$ ein **komplexes Linien-Bündel** mit dem Zusammenhang A . Dann gilt $L = P \times_G \mathbb{C}$, wobei $P := \text{Fr}(L)$ das Rahmenbündel und $G := \text{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^\times$ ist.¹

¹Um Verwirrungen zu vermeiden sind $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Einheiten von \mathbb{C} , während \mathbb{C}^* den Dualraum bezeichnet.

Dabei ist \mathbb{C}^\times insbesondere eine abelsche Lie-Gruppe, also wirkt \mathbb{C}^\times trivial auf $\mathfrak{g} = \text{Lie } \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}$, also gilt $\mathfrak{g}_P = M \times \mathbb{C}$ mit dem Produkt-Zusammenhang.

Die Krümmung $F_A \in \Omega^2(M; \mathfrak{g}_P) = \Omega^2(M; M \times \mathbb{C}) = \Omega^2(M; \mathbb{C})$ ist in diesem Fall eine einfache glatte 2-Form, für die insbesondere $0 = d_A F_A = dF_A$ gilt. Nach dem Bianchi-Theorem ist F_A dann eine geschlossene 2-Form, also liegt $[F_A] \in H^2(M; \mathbb{C})$, wobei wir hier die de Rham-Cohomologie verwenden. Ist dann $a \in \Omega^1(M; \mathbb{C})$, so gilt für die Krümmung des modifizierten Zusammenhangs

$$F_{A+a} = F_A + d_A a + \frac{1}{2} = F_A + da + 0 ,$$

wobei $[a \wedge a] = 0$ gilt, da \mathbb{C} abelsch ist. Also folgt $[F_{A+a}] = [F_A] =: [F] \in H_{\text{dR}}^2(M; \mathbb{C})$, da sich F_{A+a} und F_A nur um eine exakte 2-Form unterscheiden.

Definition 112: Wir definieren $c_1(L) := \left[-\frac{1}{2\pi i} F\right] \in H_{\text{dR}}^2(M; \mathbb{C})$ als die **erste Chern-Klasse**.

Bemerkung: Bezüglich des Koeffizientenwechsels $H^2(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{\text{dR}}^2(M; \mathbb{C})$ der Cohomologie hat $c_1(L)$ einen natürlichen Lift nach $H^2(M; \mathbb{Z})$, den wir ebenfalls mit $c_1(L)$ bezeichnen.

Es sei an dieser Stelle schon vorweggenommen, dass man die Theorie der charakteristischen Klassen - zu denen die Chern-Klasse gehört - auch vollständig axiomatisch ableiten kann, dazu sei auf das Buch [MS74] verwiesen. Später in Kapitel 8 gehen wir näher auf die differentialgeometrischen Eigenschaften charakteristischer Klassen ein.

Proposition 113: In jedem Hauptfaser-G-Bündel $P \xrightarrow{\pi} M$ existiert ein Zusammenhang.

Beweis. Wähle eine Zerlegung der Eins $\{\beta_j\}$ auf M , sodass $\sum_j \beta_j = 1$ und $\text{supp}(\beta_j) \subset U_j$ für offene Umgebungen $U_j \subset M$ gilt, auf denen $P|_{U_j}$ trivial ist. Ist ω_j eine lokale Zusammenhangs-Form auf $P|_{U_j}$, dann liefert

$$\omega = \sum_j \beta_j \omega_j$$

eine Zusammenhangs-Form auf P . □

Wir wollen nun eine Anwendung der vorigen Konstruktion explizit verfolgen, indem wir die erste Chern-Klasse (und damit die Krümmung) des tautologischen Linien-Bündels (Definition folgt gleich) berechnen. Doch zuerst:

Lemma 114: Sei ∇ ein Zusammenhang im komplexen Linien-Bündel $E = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathbb{C}$, sodass $\nabla(\frac{1}{z}) = 0$ ausserhalb einer kleinen Umgebung U der Null gilt - dabei bezeichnet $\frac{1}{z}$ den Schnitt $s \in \Gamma(E)$ mit $s(z) = \frac{1}{z}$ für $z \neq 0$. Dann ist $F_\nabla = 0$ ausserhalb von U und es gilt

$$\int_{\mathbb{C}} F_\nabla = 2\pi i .$$

Beweis. Es sei $\nabla = d + f dx + g dy$ für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dann gilt für die Krümmung dieses Zusammenhangs

$$F_\nabla = d(f dx + g dy) = (\partial_1 g - \partial_2 f) dx \wedge dy .$$

Ausserhalb von U soll $0 = \nabla(\frac{1}{z}) = (\partial_1 + f)\frac{1}{z} dx + (\partial_2 + g)\frac{1}{z} dy$ gelten, sodass wir zwei Differentialgleichungen mit den Lösungen

$$f(z) = -z\partial_1\left(\frac{1}{z}\right) = -z\left(-\frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{z}$$

$$g(z) = -z\partial_2\left(\frac{1}{z}\right) = -zi\partial_1\left(\frac{1}{z}\right) = if(z)$$

erhalten. Also gilt $\nabla = d + \frac{1}{z}(dx + i dy) = d + \frac{1}{z} dz$ für den Zusammenhang mit den geforderten Eigenschaften, es gilt also $F_\nabla = d(\frac{1}{z} dz) = 0$ außerhalb von U . Unter Verwendung des Residuensatzes ergibt sich dann

$$\int_{\mathbb{C}} F_\nabla = \int_{\mathbb{C}} d(f dx + g dy) = \int_{D_r} d(f dx + g dy) = \oint_{\partial D_r} f dx + g dy = \oint_{\partial D_r} \frac{dz}{z} = 2\pi i ,$$

wobei D_r die Einheitskreisscheibe vom Radius r um Null bezeichnet. □

Definition 115: Mit $\tau \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}\mathcal{P}^n$ bezeichnen wir das (komplexe) **tautologische Linien-Bündel**, wobei $\mathbb{C}\mathcal{P}^n = \{\text{Linien durch Null in } \mathbb{C}^{n+1}\}$ der komplexe projektive Raum ist. Den Totalraum des tautologischen Bündels können wir daher auch notieren als

$$\tau = \{(L, v) : L \subset \mathbb{C}^{n+1} \text{ ist eine komplexe Linie mit } v \in L\} .$$

Bemerkung: Analog gibt es auch ein reelles tautologisches Bündel, der Totalraum von $\tau \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}\mathcal{P}^1$ entspricht dem Möbiusband.

Proposition 116: Die erste Chern-Klasse des tautologischen Linien-Bündels $\tau \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}\mathcal{P}^1$ ist

$$\int_{\mathbb{C}\mathcal{P}^1} c_1(\tau) = -1 .$$

Beweis. Es sei $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{C}\mathcal{P}^1$ mit $(z_1, z_2) \mapsto [z_1 : z_2]$ die Projektion in die homogenen Koordinaten des komplexen projektiven Raums. Definiere einen Schnitt $s \in \Gamma(\tau|_{\mathbb{C}\mathcal{P}^1 \setminus [0:1]})$ durch

$$s([1 : z]) := (1, z) \in \mathbb{C}^2 ,$$

dann gilt für $z \neq 0$ insbesondere $s([z, 1]) = s([1, \frac{1}{z}]) = (1, \frac{1}{z}) = \frac{1}{z}(z, 1)$. Wähle dann einen Schnitt \tilde{s} , sodass das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \xrightarrow{(z,w) \mapsto ([z:1], w[z:1])} & \tau|_{\mathbb{C}\mathcal{P}^1 \setminus [0:1]} \\ \text{pr}_1 \downarrow \tilde{s} & \cong \circlearrowleft & \pi \downarrow s \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{C}\mathcal{P}^1 \setminus [0 : 1] \end{array}$$

kommutativ wird. Für $z \neq 0$ ist dann insbesondere $\tilde{s}(z) = (z, \frac{1}{z})$. Wähle nun einen Zusammenhang ∇ im tautologischen Bündel τ , sodass $\nabla(s) = 0$ außerhalb einer kleinen Umgebung U von $[0 : 1]$ gilt. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{C}\mathcal{P}^1} c_1(\tau) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} F_A = -1$$

und der Satz ist bewiesen. □

6.3 Krümmung in Vektorbündeln

Sei $P \xrightarrow{\pi} M$ ein Hauptfaser- G -Bündel, V ein Vektorraum und $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ eine Darstellung der Gruppe G . Weiter sei $E = P \times_G V$ das zugeordnete Vektorbündel und A ein Zusammenhang in P sowie $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ eine entsprechende Zusammenhangs-Form.

Satz 117: Für zwei glatte Vektorbündel $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und einen glatten Schnitt $s \in \Gamma(E)$ gilt für die Krümmung die Beziehung

$$F_A(X, Y) \cdot s = ([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]})s$$

zur kovarianten Ableitung, wobei $[\nabla_X, \nabla_Y] = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X$ sei und alle kovarianten Ableitungen bzw. Zusammenhänge als $\nabla = \nabla^A$ zu verstehen sind.

Bemerkung: Die rechte Seite der Proposition wird oft verwendet um Krümmung zu definieren. An dieser Stelle sei daran erinnert, dass die Krümmung ein Objekt $F_A \in \Omega^2(M; \mathfrak{g}_E)$ ist und $\mathfrak{g}_E \in \text{End}(E)$. Für zwei Tangentialvektoren $v, w \in T_x M$ gilt dann

$$F_A(v, w) \in (\mathfrak{g}_E)_x \subset \text{End}(E_x) ,$$

d.h. wir können die Krümmung als lineare Abbildung $F_A(v, w) : E_x \rightarrow E_x$ auffassen.

Beweis. Ein glattes horizontales Vektorfeld $X^\# \in \mathfrak{X}(P)$ ist der horizontale Lift von X , sodass $-\mathcal{F}(X, Y) = [X^\#, Y^\#] - [X, Y]^\#$ ein vertikales G -invariantes Vektorfeld auf P ist. Sind dann $v, w \in T_u P$, so gilt

$$\mathfrak{g} \ni \tilde{F}_A(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\omega(\mathcal{F}(\pi_* v, \pi_* w))}_{\in T_u^* P} ,$$

Verwenden wir nun den Isomorphismus $R : \Omega^r(M; \mathfrak{g}_P) \xrightarrow{\cong} \tilde{\Omega}^r(P; \mathfrak{g})$, so gilt auf $T_u P$ dann $R\varphi = u^{-1}\varphi\pi$ mit

$$u : \mathfrak{g} \xrightarrow{\cong} (\mathfrak{g}_P)_x$$

für $x := \pi(u)$. Sei nun $s \in \Gamma(E)$ ein glatter Schnitt, dann gilt $R(\nabla_X s) = X^\# R s = X^\# \tilde{s}$ für $\tilde{s} = R s$, also gilt $R F_A = \tilde{F}_A$ in analoger Notation. Betrachten wir

$$\begin{aligned} \underbrace{\tilde{F}_A(X^\#, Y^\#)}_{P \rightarrow \mathfrak{g}} \tilde{s} &= \omega(\mathcal{F}(X, Y)) \tilde{s} = -\mathcal{F}(X, Y) \tilde{s} \\ &= ([X^\#, Y^\#] - [X, Y]^\#) \tilde{s} = X^\# Y^\# \tilde{s} - Y^\# X^\# \tilde{s} - [X, Y]^\# \tilde{s} , \end{aligned}$$

dann folgt wegen $R(\nabla_X \nabla_Y s) = X^\# R(\nabla_Y s) = X^\# Y^\# R s = X^\# Y^\# \tilde{s}$ mit $p := \pi(u)$ direkt

$$\begin{aligned} \underbrace{R(F_A(X, Y)s)}_{P \rightarrow V} &= u^{-1}(F_A(X_p, Y_p)s(p)) = (u^{-1}F_A(X_p, Y_p))u^{-1}(s(p)) \\ &= (u^{-1}F(\pi_* X_u^\#, \pi_* Y_u^\#))\tilde{s}(u) = \tilde{F}_A(X_u^\#, Y_u^\#)\tilde{s}(u) \end{aligned}$$

die Identität $R(F_A(X, Y)s) = \tilde{F}_A(X^\#, Y^\#)\tilde{s}$. □

Proposition 118: Für jedes $\varphi \in \Omega^r(M; E)$ gilt $d_A^2 \varphi = F_A \wedge \varphi$. Ist insbesondere $s \in \Gamma(E)$ ein glatter Schnitt, dann gilt für die äußere kovariante Ableitung $d_A^2 s = F_A s$.

Bemerkung: Diese Aussage bestimmt das Bild von $F_A \in \Omega^2(M; \mathfrak{g}_P)$ in $\text{End}(E)$. Wenn die Gruppe G allerdings nicht treu auf V wirkt, dann ist die Bestimmung von F_A nicht vollständig. Dies gilt ebenfalls, wenn man die rechte Seite von Proposition 117 als Definition der Krümmung eines Vektorbündels verwendet.

Bevor wir mit dem Beweis der Proposition fortfahren, ist zunächst zu klären, was $F_A \wedge \varphi$ sei soll. Dazu betrachten wir erneut die Abbildung (6.1) von Seite 58, aus der sich die Bedeutung dieses Dachprodukts ergibt, es gilt also

$$\begin{aligned} (\Lambda^r(T^*M) \otimes \mathfrak{g}_P) \otimes (\Lambda^s(T^*M) \otimes E) &\longrightarrow \Lambda^{r+s}(T^*M) \otimes E \quad [??] \\ (\psi_1 \otimes \xi) \otimes (\psi_2 \otimes s) &\mapsto (\psi_1 \wedge \psi_2) \otimes \xi s \quad [??] \end{aligned}$$

Beweis. Da es sich um eine lokale Aussage handeln können wir von $M = \mathbb{R}^n$, $P = \mathbb{R}^n \times G$ und $E = \mathbb{R}^n \times V$ ausgehen. Außerdem können wir $\varphi = \alpha \otimes s$ für $\alpha \in \Omega^r(M)$ und $s \in \Gamma(E)$ zerlegen, und den Zusammenhang als

$$\nabla = d + \sum_j dx_j \otimes a_j$$

mit $a_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$ darstellen. Die äußere kovariante Ableitung des Schnitts s ergibt sich dann zu $d_A s = \nabla s = \sum_j dx_j \otimes (\partial_j + a_j)s$ und

$$\begin{aligned} d_A^2 s &= - \sum_j dx_j \wedge \nabla((\partial_j + a_j)s) = - \sum_j dx_j \wedge \sum_i dx_i \otimes (\partial_i + a_i)(\partial_j + a_j)s \\ &= \sum_{i < j} (dx_i \wedge dx_j) \otimes [\nabla_i, \nabla_j]s \stackrel{(*)}{=} \sum_{i < j} (dx_i \wedge dx_j) \otimes F_{ij} = F_A s, \end{aligned}$$

für $\nabla_i := \nabla_{\partial_i}$, wobei an der mit (*) gekennzeichneten Stelle außerdem noch

$$F_{ij}s = ([\nabla_i, \nabla_j] - \nabla_{[\partial_i, \partial_j]})s = [\nabla_i, \nabla_j]s$$

einght. Betrachten nun andererseits für das Tensorprodukt von $\alpha \in \Omega^r(M)$ und $\varphi \in \Gamma(E)$ das kovariante Ableitungsquadrat

$$\begin{aligned} d_A^2(\alpha \otimes \varphi) &= d_A(d\alpha \otimes \varphi + (-1)^r \alpha \wedge d_A \varphi) \\ &= d^2 \alpha \otimes \varphi + (-1)^{r+1} d\alpha \wedge d_A \varphi + (-1)^r [d\alpha \wedge d_A \varphi + (-1)^r \alpha \wedge d_A^2 \varphi] \\ &= \alpha \wedge d_A^2 \varphi = \alpha \wedge F_A \varphi = F_A \wedge (\alpha \otimes \varphi), \end{aligned}$$

so erhalten wir die Aussage $\alpha \wedge F_A \varphi = F_A \wedge (\alpha \otimes \varphi)$. □

6.4 Abbildungen von Zusammenhängen I

An dieser Stelle bietet es sich an, dass wir zunächst noch einige Eigenschaften von Hauptfaserbündeln studieren.

Proposition 119: Es seien $P \xrightarrow{\pi} M$ und $P' \xrightarrow{\pi'} M'$ zwei Hauptfaser- G -Bündel über M und $\rho : P' \rightarrow P$ eine glatte G -äquivariante Abbildung, außerdem sei A ein Zusammenhang in P . Dann existiert ein eindeutiger Zusammenhang A' im Bündel P' , sodass

$$\rho_* A'_u \subset A_{\rho(u)}$$

für alle Punkte $u \in P'$ gilt.

Beweis. • *Eindeutigkeit:* Seien $V'_u \subset T_u P'$ und $V_{\rho(u)} \subset T_{\rho(u)} P'$ die vertikalen Unterräume, sodass die Beziehung

$$\rho_* : \begin{cases} V'_u \xrightarrow{\cong} V_{\rho(u)} \\ A'_u \longrightarrow A_{\rho(u)} \end{cases}$$

gilt. Sei weiter $v \in V'_u$ ein vertikaler und $w \in A'_u$ ein horizontaler Tangentialvektor bezüglich des Zusammenhangs. Liegt dann $\rho_*(v+w) \in A_{\rho(u)}$, dann folgt wegen Linearität $\rho_* w = 0$ und damit $w = 0$. Also gilt $A'_u = (\rho_*)^{-1} A_{\rho(u)}$, dies liefert die Eindeutigkeit des Zusammenhangs A' .

• *Existenz:* Wir müssen zwei Dinge überprüfen:

1. Wenn $\pi' : P' \rightarrow M'$ die die Bündelprojektion ist, dann muss für die induzierte Abbildung

$$\pi'_* : A'_u \xrightarrow{\cong} T_{\pi'(u)} M'$$

gelten. Dies ist in der Tat der Fall, da die Zerlegung $T_u P' = A'_u \oplus V'_u$ gilt.

2. Es ist zu zeigen, dass A' auch G -invariant ist. Für ein Gruppenelement $g \in G$ gilt

$$\rho_*(r_g)_* A'_u = (r_g)_* \rho_* A'_u = (r_g)_* A_{\rho(u)} = A_{\rho(u)g} = A_{\rho(ug)} ,$$

also folgt $(r_g)_* A'_u \subset A'_{ug}$. Da beide Räume aber die gleiche Dimension haben, müssen sie gleich sein.

Damit ist die Proposition bewiesen. □

Lemma 120: *In der Situation der vorigen Proposition seien $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ und $\omega' \in \Omega^1(P'; \mathfrak{g})$ zwei Zusammenhangsformen sowie $\tilde{F} \in \Omega^2(M; \mathfrak{g}_P)$ und $\tilde{F}' \in \Omega^2(M; \mathfrak{g}_{P'})$ die Krümmungsformen zu den Zusammenhängen A und A' , die in der Beziehung*

$$A'_u = (f_*)^{-1} A_{f(u)}$$

zueinander stehen. Dann gilt $\omega' = \rho^ \omega$ und $\tilde{F}' = \rho^* \tilde{F}$.*

Beweis. 1. Für die Zusammenhangs-Formen müssen wir die beiden definierenden Eigenschaften nachprüfen. Zuerst gilt

$$\rho^* \omega(\xi_u^*) = \omega \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_0 \rho(u \exp(t\xi)) \right) = \omega \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(u) \exp(t\xi) \right) = \omega(\xi_{f(u)}^*) = \xi = \omega'(\xi_u^*)$$

und wegen $\ker \omega' = A' = f^* A = f^* \ker \omega = \ker(f^* \omega)$ folgt dann $\omega' = f^* \omega$.

2. Mit der Natürlichkeit der Zusammenhangsformen erhalten wir dann auch die Natürlichkeit der Krümmungsformen. Seien

$$h : T_u P \rightarrow A_u \quad \text{und} \quad h' : T_u P' \rightarrow A'_u$$

die Projektionen auf die Horizontalteile, dann folgt direkt

$$\tilde{F}' = d\omega' \circ h = d(f^* \omega) \circ h' = f^*(d\omega) \circ h' = (d\omega) f_* h' = (d\omega) h f_* = \tilde{F} f_* = f^* \tilde{F} .$$

Damit ist die Natürlichkeit von Zusammenhangs-Formen und Krümmungs-Formen gezeigt. □

6.5 Pullback-Zusammenhänge

Proposition 121: Sei $P \xrightarrow{\pi} M$ ein Hauptfaser- G -Bündel und $f : M' \rightarrow M$ eine glatte Abbildung. Mit dem Totalraum

$$f^*P := \{(p, u) \in M' \times P : f(p) = \pi(u)\} \quad \text{gemäß} \quad \begin{array}{ccc} f^*P \subset M' \times P & \xrightarrow{\text{pr}_2} & P \\ \text{pr}_1 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi \\ M' & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

erhalten wir dann ein **Pullback-Hauptfaser- G -Bündel** $f^*P \xrightarrow{\text{pr}_1} M'$.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass f^*P eine glatte Untermannigfaltigkeit von $M' \times P$ ist. Da es sich um ein lokales Problem handelt, können wir $P = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, $M = \mathbb{R}^k$ und $\pi = \text{pr}_1$ annehmen (es sei daran erinnert, dass G eine Lie-Gruppe und als solche eine Mannigfaltigkeit ist - wir betrachten also kein Vektorbündel), dann ist

$$f^*P = \{(p, x, y) \in M' \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n : f(p) - x = 0\}.$$

Da 0 ein regulärer Wert von $(p, x, y) \mapsto f(p) - x$ ist, bildet $f^*P \subset M' \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ eine glatte Untermannigfaltigkeit. Durch Verwendung von Karten erhalten wir dann allgemein, dass $f^*P \subset M' \times P$ eine glatte Untermannigfaltigkeit ist. Da sich alle weiteren Eigenschaften von P auf f^*P übertragen, ist

$$f^*P \xrightarrow{\text{pr}_1} M' \quad \text{mit den Fasern} \quad (f^*P)_p = \{p\} \times P_{f(p)}$$

ein Hauptfaser- G -Bündel. □

Bemerkung: • Da $\text{pr}_2 : \rho^*P \rightarrow P$ eine G -äquivariante Abbildung ist, induziert jeder Zusammenhang A in P auch einen entsprechenden Zusammenhang f^*A in f^*P .

- Sei $\rho : P' \rightarrow P$ eine G -äquivariante Abbildung wie zuvor, dann erhalten wir eine induzierte, glatte Basisraum-Abbildung $\psi : M' \rightarrow M$. Diese liefert uns dann, dass $P' \xrightarrow{\sim} f^*P$ ein Hauptfaser- G -Bündel-Isomorphismus ist gemäß

$$\begin{array}{ccc} P' & \xrightarrow{\rho} & P \\ \pi' \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi \\ M' & \xrightarrow{f} & M \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{pr}_2 \\ \curvearrowright \\ \text{pr}_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \circlearrowleft \\ \end{array} \quad f^*P$$

Proposition 122: Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Vektorbündel mit dem Zusammenhang ∇ und weiter $f : M' \rightarrow M$ eine glatte Abbildung. Dann existiert ein eindeutiger Zusammenhang $\nabla' = f^*\nabla$ in $E' = f^*E$, sodass für alle Schnitte $s \in \Gamma(E)$ und Tangentialvektoren $v' \in T_{p'}M'$ dann

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\quad} & E \\ f^*s \uparrow \text{pr}_1 & \nearrow & \uparrow \pi \\ M' & \xrightarrow{f} & M \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \nabla'_{v'}(f^*s) = \nabla_{f_*v'}(s)$$

in $E'_{p'} = E_{f(p')}$ gilt.

Dann folgt für den modifizierten Zusammenhang

$$\nabla^{A_0+a}(s_j) = \nabla^{A_0}(s_j) + as_j = \sum_i a_{ij} \otimes s_i$$

mit $a_{ij} = \sigma^* \tilde{a}_{ij}$ für $\tilde{a}e_j = \sum_i \tilde{a}_{ij} e_i$. Da σ ein horizontaler Schnitt ist, folgt dann

$$\sigma^* \hat{a} = \sigma^*(\omega - \omega_0) = \sigma\omega$$

und damit $a_{ij} = \sigma^* a_{ij} = \sigma^* \omega_{ij}$, also folgt für den Zusammenhang

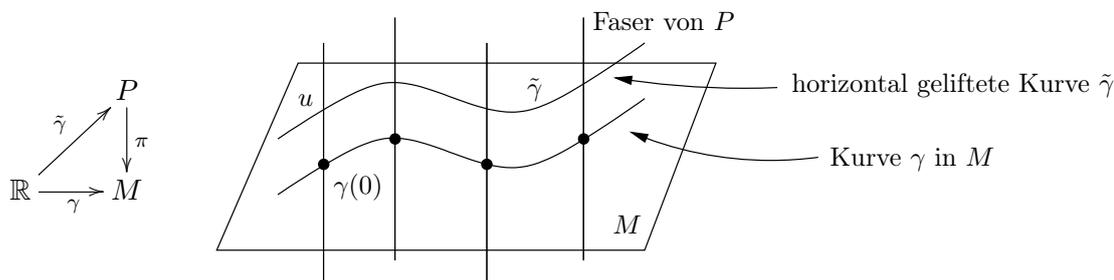
$$\nabla^{A_0+a} = \sum_i a_{ij} \otimes s_i = \sum_i \sigma^*(\omega_{ij}) \otimes s_i .$$

Somit haben wir die Proposition bewiesen. □

7 Holonomie

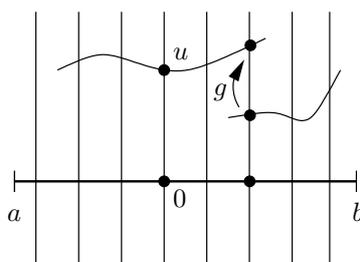
7.1 Holonomie im Allgemeinen

Betrachten wir einen Zusammenhang im Hauptfaser- G -Bündel $P \rightarrow M$ und eine glatte Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$. Wähle dann ein u aus der Faser über dem Punkt $\gamma(0) \in M$, dies sei der Anfangswert eines horizontalen Lifts $\tilde{\gamma}$ der Kurve gemäß



Proposition 124: Sei $P \xrightarrow{\pi}]a, b[$ ein Hauptfaser- G -Bündel für $a < 0 < b$. Ist weiter A ein Zusammenhang in P , dann existiert zu jedem $u \in P_0 = \pi^{-1}(0)$ eine eindeutige horizontale Kurve $\gamma_u :]a, b[\rightarrow P$, sodass $\gamma_u(0) = u$ und $\pi\gamma_u = \text{Id}$ gilt, d.h. es handelt sich insbesondere um einen globalen, horizontalen Schnitt des Bündels.

Beweis. Sei $X := (\frac{\partial}{\partial t})^\#$ der horizontale Lift des Vektorfelds $\frac{\partial}{\partial t}$ und $\gamma :]a', b'[\rightarrow P$ die maximale Integralkurve von X mit $\gamma(0) = u$. Dann gilt $a \leq a' < 0 < b' \leq b$ nach dem Existenzsatz von Integralkurven.



Nehmen wir nun $b' < b$ an. Sei dann $\sigma :]b' - \delta, b' + \delta[\rightarrow P$ eine Integralkurve mit $\pi\sigma(b') = b'$, dann wähle das Gruppenelement $g \in G$ so, dass

$$\sigma(b' - \frac{\delta}{2})g = \gamma(b' - \frac{\delta}{2})$$

gilt. Durch die Eindeutigkeit von Integralkurven folgt $\sigma(t)g = \gamma(t)$ für $b' - \delta < t < b'$, also ist

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & : a' < t < b' \\ \sigma(t)g & : b' - \delta < t < b' + \delta \end{cases}$$

eine Integralkurve zu X mit $\tilde{\gamma}(0) = u$. Dies steht aber im Widerspruch zur Annahme, dass die ursprüngliche Integralkurve γ maximal sei, also muss $b' = b$ und $a' = a$ für die maximale Integralkurve gelten.

Diese Ausführung beweist die Existenz einer Integalkurve, die Eindeutigkeit folgt dann schlicht aus der Eindeutigkeit von Integalkurven. \square

Korollar 125: *Es existiert ein Isomorphismus von Bündeln $f :]a, b[\times G \xrightarrow{\cong} P$, welcher den kanonischen Produkt-Zusammenhang des trivialen Bündels $]a, b[\times G$ auf den Zusammenhang A von P abbildet (d.h. A ist insbesondere trivial).*

Nun übertragen wir die Aussage der vorigen Proposition vom Intervall-Basisraum $]a, b[$ auf eine beliebige Mannigfaltigkeit M .

Proposition 126: *Sei $P \xrightarrow{\pi} M$ ein beliebiges Hauptfaser- G -Bündel mit einem Zusammenhang A , einer glatten Kurve $\beta : [a, b] \rightarrow M$ und einem Punkt $u \in P_a$ über dem Startpunkt der Kurve. Dann existiert eine horizontale Kurve $\beta_u : [a, b] \rightarrow P$, sodass $\beta_u(a) = u$ und $\pi \gamma_u = \beta$ gilt, gemäß*

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \nearrow \beta_u & \downarrow \pi \\ [a, b] & \xrightarrow{\beta} & M \end{array} .$$

Die Abbildung β_u ist also ein Schnitt des Pullback-Bündels.

Beweis. Wir können β glatt zu $\beta :]a - \delta, b + \delta[\rightarrow M$ fortsetzen (Argumentation wie im vorigen Beweis). Die glatte Abbildung $\tilde{\beta} : [a, b] \rightarrow P$ mit $\pi \tilde{\beta} = \beta$ ist genau dann horizontal bezüglich A , wenn die zugehörige Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \beta^*P$ horizontal bezüglich β^*A ist. Wenden wir dann die vorige Proposition an, so erhalten wir die Aussage. \square

Definition 127: Wir definieren mit den vorigen Ausführungen, welche die Wohldefiniertheit liefern, den G -äquivalenten **Holonomie-Isomorphismus für glatte Kurven und Hauptfaserbündel**

$$\text{Hol}_\beta(A) : P_a \xrightarrow{\cong} P_b \quad u \mapsto \beta_u(b) .$$

Bemerkung: Bei der Holonomie handelt es sich somit (zumindest vorerst) lediglich um einen anderen Formalismus zur Beschreibung der Parallelverschiebung. Ist $\delta : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ glatt mit $\sigma(a') = a$ und $\sigma(b') = b$, dann gilt

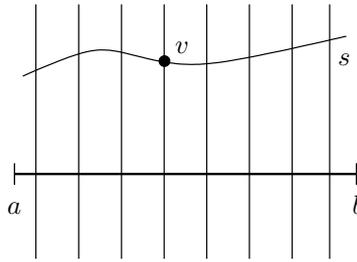
$$\text{Hol}_{\beta \circ \delta}(A) = \text{Hol}_\beta(A) ,$$

denn die Zusammenschaltung $\beta_u \circ \delta$ ist ebenfalls horizontal gemäß der Invarianz von Integralkurven bezüglich Reparametrisierung.

7.2 Holonomie in Vektorbündeln

Lemma 128: *Sei ∇ ein Zusammenhang im Vektorbündel $E \xrightarrow{\pi} [a, b]$ für $a \leq 0 \leq b$ und $v \in E_0$, dann existiert ein eindeutiger Schnitt $s \in \Gamma(E)$, sodass $s(0) = v$ und $\nabla s = 0$ gilt, d.h. s ist kovariant konstant.*

Beweis. Wir können eine Trivialisierung der Form $E \cong [a, b] \times \mathbb{C}^n$ finden, welche den Zusammenhang ∇ auf den kanonischen Produkt-Zusammenhang d abbildet. Dazu verwende das Rahmen-Bündel $P = \text{Fr}(E)$ und wende das letzte Korollar an. \square



Definition 129: Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein (komplexes) Vektorbündel mit dem Zusammenhang ∇ und $\gamma :]a, b[\rightarrow M$ eine glatte Kurve. Definiere dann den linearen Isomorphismus

$$\text{Hol}_\gamma(\nabla) : E_{\gamma(a)} \xrightarrow{\cong} E_{\gamma(b)}$$

wie folgt: Für $v \in E_{\gamma(a)}$ sei $s \in \Gamma(\gamma^*E)$ der eindeutige Schnitt im Pullback-Bündel über $]a, b[$, sodass $s(a) = v$ und $(\gamma^*\nabla)s = 0$ nach dem vorigen Lemma gilt. Setze dann

$$\text{Hol}_\gamma(\nabla)v := s(b) \in (\gamma^*E)_b \cong E_{\gamma(b)},$$

dies definiert den **Holonomie-Isomorphismus für glatte Kurven im Vektorbündel**.

7.3 Holonomie und die kovariante Ableitung

Sei dann wie zuvor $E \xrightarrow{\pi} M$ ein komplexes Vektorbündel mit dem Zusammenhang ∇ und $\gamma :]a, b[\rightarrow M$ eine glatte Kurve, sodass gilt

$$\begin{array}{ccc} \gamma^*E & \xrightarrow{\quad} & E \\ \downarrow & \nearrow s & \uparrow \sigma \\]a, b[& \xrightarrow{\gamma} & M \end{array} \quad \begin{array}{c} \pi \\ \downarrow \end{array}$$

Definition 130: Ein **Schnitt von E entlang einer Kurve γ** ist eine glatte Abbildung $s :]a, b[\rightarrow E$, sodass $\pi s = \gamma$ gilt.

Definition 131: Die **Ableitung des Schnitts s entlang einer Kurve γ** wird für $t_0 \in]a, b[$ durch die kovariante Ableitung im triviales Pullback-Bündel über $]a, b[$ als

$$\nabla_{\gamma'(t_0)}(s) := \left[(\gamma^*\nabla)_{\frac{\partial}{\partial t}}(s) \right]_{t_0} \in (\gamma^*E)_{t_0} \cong E_{\gamma(t_0)}$$

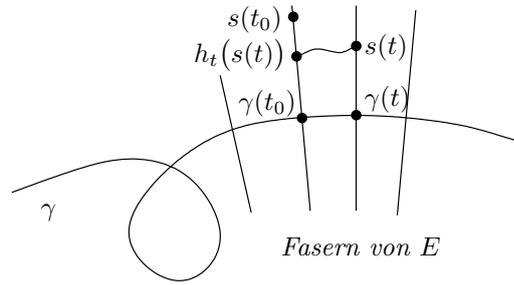
definiert.

Bemerkung: Sei $s = \gamma^*\sigma := \sigma \circ \gamma$ für $\sigma \in \Gamma(E)$, dann gilt $(\gamma^*\nabla)_{\frac{\partial}{\partial t}}(s) = \nabla_{\gamma'(t_0)}(\sigma)$, wobei letzteres einer üblichen kovariante Ableitung aus Abschnitt 5.4 entspricht.

Proposition 132: Für $t \in]a, b[$ sei mit $h_t : E_{\gamma(t)} \xrightarrow{\cong} E_{\gamma(t_0)}$ der Holonomie-Isomorphismus $\text{Hol}_{\gamma|_{]t_0, t[}}$ bzw. $\text{Hol}_{\gamma|_{]t, t_0[}}$ des Zusammenhangs ∇ entlang der Kurve γ bezeichnet. Sei s ein Schnitt

von E entlang der Kurve γ dann gilt

$$\nabla_{\gamma'(t_0)}(s) = \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \underbrace{h_t(s(t))}_{\substack{\text{Kurve} \\ \text{in } E_{\gamma(t)}}$$



Beweis. Da es sich um eine lokale Aussage handelt, können wir von $M = \mathbb{R}$ und $\gamma = \text{Id}$ ausgehen, dann ist $E = \mathbb{R} \times V$ und $\nabla = \text{Id}$. Folglich ist auch $h_t = \text{Id}$, deswegen ist die Aussage trivial. \square

Beispiel: Sei $E := M \times \mathbb{C} \xrightarrow{\text{pr}_1} M$ ein triviales Linien-Bündel und $\nabla = d + a$ der Zusammenhang in E für ein $a \in \Omega^1(M; \mathbb{C})$. Ist dann weiter $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine glatte Kurve im Basisraum, so entspricht $\text{Hol}_\gamma(\nabla)$ der Multiplikation mit dem Faktor $\exp(-\int_0^1 \gamma^* a)$.

Um dies zu beweisen, betrachte den Pullback-Zusammenhang $\nabla' = \gamma^* \nabla = d + \gamma^* a$, wobei $\gamma^* a = b dt$ ist. Suche dann ein $s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$0 = \nabla'(s) = \left(\frac{ds}{dt} + b \right) dt \iff \frac{ds}{dt} + b = 0,$$

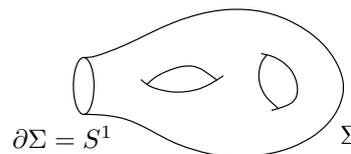
dann erhalten wir aus dieser gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung schließlich

$$s(t) = s(0) \cdot \exp\left(-\int_0^1 b\right).$$

Dies liefert einen Schnitt von E entlang γ mit $\nabla s = 0$, also entspricht $\text{Hol}_\gamma(\nabla) = \text{Hol}_{[0,1]}(\gamma^* \nabla)$ der Multiplikation mit $\exp(-\int_0^1 b) = \exp(-\int_0^1 \gamma^* a)$.

Korollar 133: Sei Σ eine kompakte, zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeit mit $\partial\Sigma = S^1$. Dann gilt zwischen Holonomie und Krümmung die Beziehung

$$\text{Hol}_{\partial\Sigma}(\nabla) = \exp\left(-\int_\Sigma F(\nabla)\right),$$



wobei ∇ ein Zusammenhang in einem komplexen Linien-Bündel $L \xrightarrow{\pi} \Sigma$ sei. Ist insbesondere dieser Zusammenhang Σ flach, so gilt $\text{Hol}_{\partial\Sigma}(\nabla) = 1$.

Beweis. Eine Feststellung aus der Differentialtopologie sei zunächst vorausgeschickt: Jedes komplexe Linien-Bündel einer Mannigfaltigkeit wie Σ ist trivial.

Wir können also von $L = \Sigma \times \mathbb{C}$ und $\nabla = d + a$ für $a \in \Omega^1(\Sigma; \mathbb{C})$ ausgehen, folglich erhalten wir dann direkt

$$\text{Hol}_{\partial\Sigma}(\nabla) = \exp\left(-\int_{\partial\Sigma} a\right) = \exp\left(-\int_\Sigma da\right) = \exp\left(-\int_\Sigma F_\nabla\right),$$

und dies liefert direkt die Aussage. \square

7.4 Abbildungen von Zusammenhängen II

Proposition 134: Sei $P' \xrightarrow{\pi'} M$ ein Hauptfaser- G' - und $P \xrightarrow{\pi} M$ ein Hauptfaser- G -Bündel über M . Weiter sei $f : P' \rightarrow P$ eine glatte Abbildung mit $\pi f = \pi'$, sodass für alle $u \in P'$ und $g \in G'$

$$\begin{array}{ccc}
 P' & \xrightarrow{f} & P \\
 \searrow \pi' & \circlearrowleft & \swarrow \pi \\
 & M &
 \end{array}
 \rightsquigarrow
 f(ug) = f(u) \cdot \rho(g)$$

für einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\rho : G' \rightarrow G$ gilt. Ist dann A' ein Zusammenhang in P' , dann existiert ein eindeutiger Zusammenhang $A = f(A')$ in P , sodass die horizontalen Unterräume von P' bezüglich A' auf A -horizontale Unterräume von P abgebildet werden.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist offensichtlich, da $\pi'_*|_{A'_{u'}}$ und $\pi_*|_{A_u}$ Isomorphismen sind, muss f_* den Horizontalteil $A'_{u'}$ isomorph auf $A_{f(u')}$ abbilden.

Bei der Existenz handelt es sich um ein lokales Problem, sodass wir von der Existenz eines (lokalen) Schnitts $\sigma' \in \Gamma(P')$ ausgehen können. Definiere dann $\sigma := f \circ \sigma' \in \Gamma(P)$ so folgt mit der Identität $A_{\sigma(x)g} = (r_g)_* A_{\sigma(x)} = (r_g)_* f_* A'_{\sigma'(x)}$ direkt

$$f_* A'_{\sigma'(x)g'} = f_*(r_{g'})_* A'_{\sigma'(x)} = (r_g)_* f_* A'_{\sigma'(x)} = A_{\sigma(x)g} = A_{f(\sigma'(x)g')} ,$$

wobei $g = \rho(g')$ gilt. Damit ist die Aussage bewiesen. \square

Lemma 135: In der Situation der vorigen Proposition seien ω und ω' die Zusammenhangs-Formen zu A' und A sowie $\tilde{F}', \tilde{F} \in \tilde{\Omega}^2(P; \mathfrak{g})$ die zugehörigen Krümmungsformen. Ist weiter $\rho_* : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}$ die auf den Lie-Algebren induzierte Abbildung, so gilt

$$f^* \omega = \rho_* \circ \omega' \quad \text{und} \quad f^* \tilde{F} = \rho_* \circ \tilde{F}' .$$

Beweis. Beide Gleichheiten ergeben sich prinzipiell durch explizites Nachrechnen der entsprechenden Eigenschaften. Für ein Element $\xi' \in \mathfrak{g}'$ der Lie-Algebra folgt

$$\begin{aligned}
 (f^* \omega) \xi'^* &= (f^* \omega) \frac{d}{dt} \Big|_0 u' \exp(t\xi') = \omega \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 f(u' \exp(t\xi')) \right) \\
 &= \omega \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 u \exp(t\xi) \right) = \omega(\xi_u^*) = \xi ,
 \end{aligned}$$

und da andererseits $\rho_* \circ \omega'(\xi'^*) = \rho_*(\xi') = \xi$ gilt, erhalten wir $f^* \omega = \rho_* \circ \omega'$. Für die Beziehung zwischen den Krümmungsformen folgt durch

$$\begin{aligned}
 f^* \tilde{F} &= f^*(d\omega \circ h) = d\omega \circ h \circ f_* = d\omega \circ f_* \circ h' = d(f^* \omega) \circ h' \\
 &= d(\rho_* \circ \omega') \circ h' = \rho_* \circ d\omega' \circ h' = \rho_* \circ \tilde{F}'
 \end{aligned}$$

über den ersten Teil, damit ist das Lemma bewiesen. \square

Beispiel: Sei $P' \xrightarrow{\pi} M$ ein Hauptfaser- G' -Bündel und $\rho : G' \rightarrow G$ ein Gruppen-Homomorphismus. Setze dann $P := P' \times_{\rho} G := (P' \times G)/G'$ mit der Wirkung $h' \cdot (u', g) := (u' h'^{-1}, \rho(h')g)$ und definiere die Abbildung

$$f : P' \rightarrow P \quad u' \mapsto [u', 1] .$$

In der Situation der Proposition erhalten wir dann durch

$$P' \times_{\rho} G \xrightarrow{\sim} P \quad [u', g] \mapsto f(u')g$$

einen Isomorphismus von Hauptfaser- G -Bündeln.

Proposition 136: Betrachte die Situation der vorigen Proposition. Ist $\rho : G' \rightarrow G$ eine Überdeckung, so findet sich eine Bijektion

$$\mathcal{A}(P') \xleftrightarrow{\text{bij.}} \mathcal{A}(P) \quad A' \mapsto f(A') .$$

Beweis. Die Injektivität von $\varphi : \mathcal{A}(P') \rightarrow \mathcal{A}(P)$ ist offensichtlich, für die Surjektivität gehen wir wie folgt vor: Da $f : P' \rightarrow P$ insbesondere eine Überdeckung ist, also ein lokaler Diffeomorphismus, können wir zu einem Zusammenhang A in P dann

$$A'_{u'} := (Tf_{u'})^{-1}A_{f(u)} .$$

definieren. Für ein Gruppenelement $g' \in G'$ mit $g := \rho(g')$ folgt dann mit der G -Äquivarianz der Abbildung f

$$f_*(r_{g'})_*A'_{u'} = (r_g)_*f_*A'_{u'} = (r_g)_*A_{f(u)} \quad \text{gemäß} \quad \begin{array}{ccc} A'_{u'} \subset T_{u'}P' & \xrightarrow{f_*} & T_uP \\ (r_{g'})_* \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow (r_g)_* \\ T_{u'g'}P' & \xrightarrow{f_*} & T_{ug}P \end{array}$$

$$= A_{f(u)g} = A_{f(ug')} = f_*A'_{ug'}$$

also finden wir zu jedem Zusammenhang $A \in \mathcal{A}(P)$ einen entsprechenden Urbild-Zusammenhang $A' \in \mathcal{A}(P')$ mit $\varphi(A') = A$. □

Beispiel: Sei $L \xrightarrow{\pi} M$ ein komplexes Linien-Bündel und $L^{\otimes n} := L \otimes \dots \otimes L$ das n -fache Tensorprodukt davon. Dann definieren wir eine Abbildung zwischen den zugehörigen Rahmenbündeln durch

$$\text{Fr}(L) \rightarrow \text{Fr}(L^{\otimes n}) \quad v \mapsto v \otimes \dots \otimes v ,$$

diese ist eine n -fache Überdeckung. Die Gruppen der Bündel sind in diesem Fall $G' = G = \mathbb{C}^{\times}$ und der Gruppenhomomorphismus $\rho : \mathbb{C}^{\times} \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ mit $z \mapsto z^n$ ist ebenfalls eine n -fache Überdeckung mit der Tangentialabbildung $(T\rho)_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die der Multiplikation mit n entspricht. Es gilt dann

$$\text{Fr}(L^{\otimes n}) = \text{Fr}(L) \times_{\rho} \text{U}(1) = \text{Fr}(L)/C_n$$

für $C_n \subset \text{U}(1)$ als Untergruppe der Ordnung n . Auf diese Weise erhalten wir Bijektion

$$\mathcal{A}(L) \xleftrightarrow{\text{bij.}} \mathcal{A}(L^{\otimes n})$$

der Zusammenhangs-Räume und für die Krümmung gilt nach dem Lemma

$$F_{A^{\otimes n}} = nF_A$$

wegen $\rho'(1) = n$.

7.5 Holonomie flacher Zusammenhänge

Zunächst betrachten wir eine Umformulierung unseres altbekannten Theorems von Seite 41.

Satz 137 (Frobenius): Sei $P \xrightarrow{\pi} M$ ein Hauptfaser- G -Bündel mit dem flachen Zusammenhang A . Dann existiert für alle $u \in P$ mit einer hinreichend kleinen, offenen, zusammenhängenden Umgebung $V \subset M$ um $x := \pi(u)$ ein eindeutiger horizontaler Schnitt $\sigma \in \Gamma(P|_V)$, sodass $\sigma(x) = u$ gilt.¹

Lemma 138: Für jede stetige Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ und $u \in P_{\gamma(0)}$ existiert eine eindeutige Liftung $\gamma_u : [0, 1] \rightarrow P$ mit $\pi\gamma_u = \gamma$, sodass $\gamma_u(0) = u$ gilt und γ_u lokal von der Form $\gamma_u = \sigma \circ \gamma$ für einen horizontalen Schnitt $\sigma \in \Gamma(P|_V)$ auf $V \subset M$ ist.

Beweis. • *Existenz:* Wegen der Kompaktheit des Einheitsintervalls $[0, 1]$ existieren offene Umgebungen $V_1, \dots, V_q \subset M$ und horizontale Schnitte $\sigma_i \in \Gamma(P|_{V_i})$, sodass

$$\text{im}(\gamma) \subset \bigcup_{i=1}^q V_i$$

liegt. Für $n \geq 1$ wähle dann $0 \leq x < y \leq 1$ mit $y - x \leq \frac{1}{n}$, dann existiert ein i mit $[x, y] \subset \gamma^{-1}V_i$.

Für ein Gruppenelement $g \in G$ ist dann $\sigma_i g$ ebenso ein horizontaler Schnitt, sodass wir die Kurven-Liftung γ_u induktiv über $[0, \frac{i}{n}]$ für $i = 1, \dots, n$ definieren können, denn es liegt $\gamma([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]) \subset V_i$. Dies liefert uns die Existenz.

- *Eindeutigkeit:* Seien nun zwei derartige Abbildungen γ_u und $\tilde{\gamma}_u$ gegeben. Dann ist das Übereinstimmungsgebiet

$$\{t \in [0, 1] : \gamma_u(t) = \tilde{\gamma}_u(t)\}$$

offen (lokale Eindeutigkeit horizontaler Schnitte) und abgeschlossen zugleich (da die Kurven stetig und P als Mannigfaltigkeit hausdorffsch ist) und enthält die Null.

Damit ist die Aussage bereits gezeigt. □

Definition 139: Ist γ eine Kurve mit den Eigenschaften des vorigen Lemmas (beachte, dass γ hier nur stetig, nicht aber glatt wie zuvor sein muss), dann definiere den **Holonomie-Isomorphismus für stetige Kurven und Hauptfaserbündel** $\text{Hol}_\gamma(A) : P_{\gamma(0)} \xrightarrow{\cong} P_{\gamma(1)}$ durch $u \mapsto \gamma_u(1)$. Wir erhalten direkt die Zusammensetzungsregel

$$\text{Hol}_{\gamma_2\gamma_1}(A) = \text{Hol}_{\gamma_2}(A) \circ \text{Hol}_{\gamma_1}(A)$$

für die Hintereinanderschaltung von Wegen.



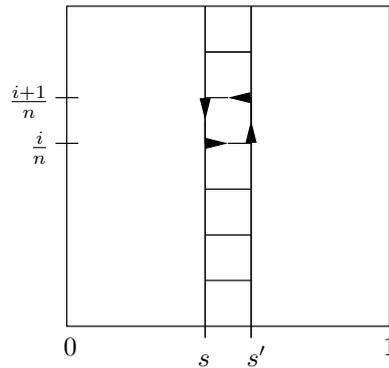
¹Die Eindeutigkeit folgt, da diese Umgebung V zusammenhängend ist. Ein horizontaler Schnitt zeichnet sich durch $\text{im}(T\sigma_y) = A_y$ für alle $y \in V$ aus.

Lemma 140: Sei A ein flacher Zusammenhang im Hauptfaser- G -Bündel $P \xrightarrow{\pi} M$ und $\gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ eine (stetige) Homotopie mit

$$\gamma(s, 0) = x_0 \quad \text{und} \quad \gamma(s, 1) = x_1$$

für alle $s \in [0, 1]$. Definiere der Kürze wegen $\gamma_s := \gamma(s, \cdot)$, dann ist $\text{Hol}_{\gamma_s} : P_{x_0} \xrightarrow{\cong} P_{x_1}$ unabhängig von s .

Beweis. Sei $s \in [0, 1]$. Es existieren offene Teilmengen $V_1, \dots, V_q \subset M$ und horizontale Schnitt $\sigma_i \in \Gamma(P|_{V_i})$ mit $\text{im}(\gamma_s) \subset \bigcup_i V_i$. Wähle dann $n \geq 1$ so, dass jedes Teilquadrat von $[0, 1] \times [0, 1]$ mit Seitenlängen $\leq \frac{1}{n}$ in $\gamma^{-1}(V_i)$ für ein passendes i enthalten ist.



Außerdem sei $0 \leq s < s' \leq 1$ mit $s' - s \leq \frac{1}{n}$, für den flachen Zusammenhang A gilt dann $\text{Hol} = \text{Id}$ um jedes Rechteck $[s, s'] \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$, also entspricht $\text{Hol}(A)$ um $[s, s'] \times [0, 1]$ der Identität und wegen der Zerlegung

$$\text{Hol}(A) = \text{Hol}_{\gamma_s}(A) \circ \text{Hol}_{\gamma_s}(A)^{-1}$$

ist dann $\text{Hol}_{\gamma_s}(A)$ lokal konstant in s . □

Bemerkung: Sei $P \xrightarrow{\pi} M$ ein Hauptfaser- G -Bündel mit dem flachen Zusammenhang A , außerdem sei $\gamma : S^1 \rightarrow M$ eine stetige Abbildung, die einen beschlossenen Weg beschreibt. Dann entspricht die Holonomie dieses Weges einem Element

$$\text{Hol}_{\gamma}(A) \in \text{Aut}_G(P_{\gamma(0)}) .$$

Für jedes $u \in P_x$ über dem Startpunkt $x := \gamma(0)$ der Kurve erhalten wir dann einen G -äquivalenten Isomorphismus

$$\alpha_u : G \xrightarrow{\cong} P_x \quad g \mapsto ug$$

der einen Isomorphismus $\text{Aut}_G(G) \cong \text{Aut}_G(P_x)$ induziert. Durch Hintereinanderschaltung von Gruppenisomorphismen gemäß

$$\begin{array}{ccc} \text{Aut}_G(P_x) & \xrightarrow{\cong} & \text{Aut}_G(G) & \xrightarrow[\cong]{f \mapsto f(1)} & G \\ & \searrow & \text{B}_u & \nearrow & \end{array}$$

erhalten wir dann eine Abbildung B_u . Aber wie hängt B_u von $u \in P_x$ ab? Wenn $\varphi \in \text{Aut}_G(P_x)$ ein Automorphismus ist, dann gilt

$$G \ni h = B_u(\varphi) \iff \varphi(ug) = uhg \quad \text{für alle } g \in G. \quad (7.1)$$

Entsprechend gilt dann für ein $a \in G$ bei $ua \in P_x$ wegen $ag = g' \in G$

$$G \ni h' = B_{ua}(\varphi) \iff uhag \stackrel{(7.1)}{=} \varphi(u(ag)) = \varphi(uag) = uah'g \quad \text{für alle } g \in G$$

und damit erhalten wir $uhag = uah'g \iff ha = ah' \iff h' = a^{-1}ha$. Mit der Adjugations-Abbildung $c_g(h) := ghg^{-1}$ folgt dann $B_{ua} = c_{a^{-1}} \circ B_u$.

Definition 141: Definiere $\text{Hol}_\gamma^u(A) := B_u(\text{Hol}_\gamma(A)) \in G$ als **Holonomie-Gruppenelement für eine geschlossene Kurve γ am Punkt u** .

Proposition 142: Sei M zusammenhängend und $x \in M$, dann erhalten wir zu einem flachen Zusammenhang A im Hauptfaser- G -Bündel $P \xrightarrow{\pi} M$ einen Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \text{Hol}(A) : \pi_1(M; x) &\longrightarrow \text{Aut}(P_x) & \text{ bzw. } & \text{Hol}^u(A) : \pi_1(M; x) \longrightarrow G. \\ [\gamma] &\mapsto \text{Hol}_\gamma(A) \end{aligned}$$

für ein $u \in P_x$. Wir können also $\text{Hol}(A) \in \text{Hom}(\pi_1(M; x), G)/G$ auffassen, wenn G auf sich selbst durch Konjugation wirkt.

Unser nächstes Ziel soll der Beweis des folgenden Theorems sein, für das wir aber erst noch einige Vorarbeit leisten müssen.

Satz 143: Sei M eine Mannigfaltigkeit und G eine Gruppe, wie üblich bezeichnen wir mit A Zusammenhänge. Definiere damit die Menge

$$\mathcal{R}_{M,G} := \left\{ (P, A) : \begin{array}{l} P \xrightarrow{\pi} M \text{ ist ein Hauptfaser-}G\text{-Bündel} \\ \text{und } A \text{ ein flacher Zusammenhang in } P \end{array} \right\} / \sim.$$

mit $(P_1, A_1) \sim (P_2, A_2)$ genau dann, wenn ein $\Phi : P_1 \rightarrow P_2$ mit $\Phi(A_1) = \Phi(A_2)$ existiert. Ist weiter M zusammenhängend, dann liefert uns die Holonomie eine Bijektion

$$\text{Hol} : \mathcal{R}_{M,G} \xrightarrow{\text{bij.}} \text{Hom}(\pi_1(M; x), G)/G.$$

Bemerkung: Dieses Theorem ist sehr nützlich, da es eine elegante Lösung der Gleichung $F_A = 0$ ermöglicht. Dies ist zunächst einmal eine nichtlineare partielle Differentialgleichung, die von Hand kaum zu lösen ist.

Proposition 144: Es sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit und $P \xrightarrow{\pi} M$ sowie $P' \xrightarrow{\pi'} M$ zwei Hauptfaser- G -Bündel mit den Zusammenhängen A und A' . Weiter sei dann $\varphi : P_x \rightarrow P'_x$ eine G -äquivalente Abbildung, sodass

$$\text{Hol}_\gamma(A) \circ \varphi = \varphi \circ \text{Hol}_\gamma(A')$$

für alle glatten Schleifen $\gamma : S^1 \rightarrow M$ mit $\gamma(1) = x$ gilt. Dann existiert ein eindeutiger Bündel-Isomorphismus $\Phi : P' \xrightarrow{\cong} P$, sodass $\Phi_x = \varphi$ und $\Phi(A') = A$ gilt.

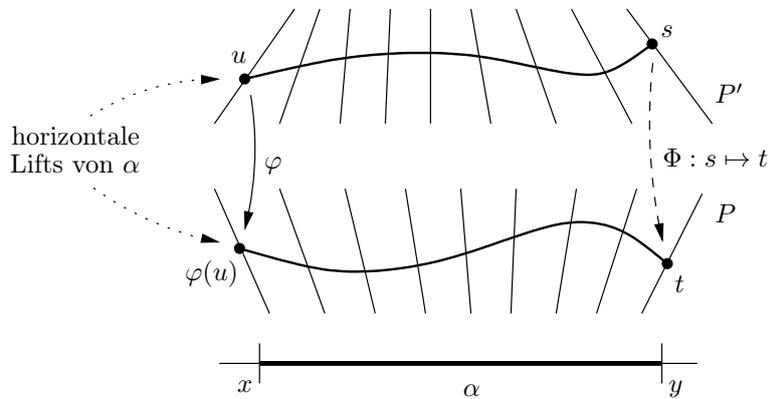
Beweis. • *Eindeutigkeit:* Sei $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ mit $\alpha(0) = x$ eine glatte Kurve in M . Wähle dann ein festes $u \in P_x$, zu dem

$$\beta' : [0, 1] \rightarrow P' \quad \text{bzw.} \quad \beta : [0, 1] \rightarrow P$$

horizontale Lifts von α mit $\beta'(0) = u$ und $\beta(0) = \varphi(u)$ sind. Es muss $\beta = \Phi \circ \beta'$ für die Beziehung zwischen beiden Kurven-Lifts gelten, also gilt insbesondere $\Phi(\beta'(1)) = \beta(1)$ für die Endpunkte der Kurve. Da die Mannigfaltigkeit zusammenhängend ist,² können wir dies für alle Punkte durchführen, und erhalten so die Eindeutigkeit.

- *Existenz:* Es sei eine glatte Kurve $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ mit $\alpha(0) = x$ und $\alpha(1) = y$ gegeben, wobei α in einer Umgebung von 0 bzw. 1 konstant sei. Definiere dann

$$\Phi|_{P'_y} := \text{Hol}_\alpha(A) \circ \varphi \circ \text{Hol}_\alpha(A')^{-1} : P'_y \rightarrow P_y .$$



Sind weiter $\alpha_1, \alpha_2 : [0, 1] \rightarrow M$ zwei glatte Wege von x nach y und konstant um 0 und 1, dann setze $\gamma := \overline{\alpha_2 \alpha_1}$. Für die so definierte glatte Schleife gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} \text{Hol}_\gamma(A) \circ \varphi &= \varphi \circ \text{Hol}_\gamma(A') \\ \iff \text{Hol}_{\alpha_1}(A) \circ \varphi \circ \text{Hol}_{\alpha_1}(A')^{-1} &= \text{Hol}_{\alpha_2}(A) \circ \varphi \circ \text{Hol}_{\alpha_2}(A')^{-1} . \end{aligned}$$

Also ist $\Phi : P' \rightarrow P$ wohldefiniert. Für die Glattheit von Φ sei auf den Beweis vom Frobenius-Theorem verwiesen. Weiter gilt $\Phi(A') = A$, da Φ die A' -horizontalen Wege ausgehend von P'_x in A -horizontale Wege mit Startpunkt in P_x abbildet.

Damit ist die Proposition gezeigt. □

Bevor wir den Satz beweisen, zunächst noch eine kurze Digression. Wenn $P \xrightarrow{\pi} M$ ein Hauptfaser- G -Bündel und $\rho : G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus zu einer Lie-Gruppe H hin ist, so definiert $Q := P \times_\rho H$ eine Hauptfaser- H -Bündel. Weiter sei $f : P \rightarrow Q$ ein Bündel-Homomorphismus mit

$$u \mapsto [u, 1] \in (P \times H)/G .$$

Wenn dann A ein Zusammenhang in P ist, so erhalten wir einen Zusammenhang $B = f(A)$ in Q , und für eine glatte Schleife $\gamma : S^1 \rightarrow M$ durch $x := \pi(u)$ gilt dann

$$\text{Hol}_\gamma(B) \circ f_x = f_x \circ \text{Hol}_\gamma(A) .$$

²Man beachte, dass auf einer glatten Mannigfaltigkeit die Begriffe „zusammenhängend“ und „wegzusammenhängend“ äquivalent sind.

durch Anwendung auf u und Beachtung von $f(u) = [u, 1]$. Damit erhalten wir dann folglich für die Holonomie

$$\text{Hol}_\gamma(B)[u, 1] = [\text{Hol}_\gamma(A)u, 1] = [\overbrace{u\text{Hol}_\gamma^u(A)}^{B_u(\text{Hol}_\gamma(A)) \in G}, 1] = [u, \overbrace{\rho(\text{Hol}_\gamma^u(A))}^{\in H}] = [u, 1] \cdot \rho(\text{Hol}_\gamma^u(A)) ,$$

sodass sich schließlich $\text{Hol}_\gamma^{[u,1]}(B) = \rho(\text{Hol}_\gamma^u(A)) \in H$ ergibt. Damit können wir nun die Aussage zeigen.

Beweis des Satzes. • *Injektivität:* Seien A und B zwei flache Zusammenhänge in P , dann gilt $\text{Hol}(A) = \text{Hol}(B)$ genau dann, wenn ein $\varphi \in \text{Aut}(P_x)$ mit $\varphi \text{Hol}_\gamma(A) = \text{Hol}_\gamma(B)\varphi$ für alle $\gamma : S^1 \rightarrow M$ mit $\gamma(1) = \alpha$ existiert. Nach der Proposition erhalten wir dann $[A] = [B] \in \mathcal{R}(P)$.

- *Surjektivität:* Sei $\pi : \tilde{M} \twoheadrightarrow M$ die universelle Überdeckungs-Projektion und $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$. Dabei ist \tilde{M} ein Hauptfaser- $\pi_1(M; x)$ -Bündel, wobei die Fundamentalgruppe $\pi_1(M; x)$ die diskrete Topologie besitzt. Die Wirkung von $\pi_1(M; x)$ ist durch

$$\tilde{\alpha} \cdot [\gamma] := \tilde{\gamma}(1)$$

bestimmt, wobei $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ eine stetige Kurve mit $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ und $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$ ist.

Übung: Für $\tilde{y} \in \tilde{M}$ und zwei glatte Schleifen $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \rightarrow M$ mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ gilt $(\tilde{y}[\gamma_1])[\gamma_2] = \tilde{y}[\gamma_1\gamma_2]$.

Sei dann $\rho : \pi_1(M; x) \rightarrow G$ ein Gruppen-Homomorphismus und definiere weiter das G -Bündel $P := \tilde{M} \times_\rho G$. Dann ist $f : \tilde{M} \rightarrow P$ ein Bündel-Homomorphismus und \tilde{M} hat einen eindeutigen (flachen) Zusammenhang A . Setze $B := f(A)$, dann ist B ebenfalls flach, da für $V \subset M$ offen und $\sigma \in \Gamma(\tilde{M})$ die Zusammenschaltung $f \circ \sigma \in \Gamma(P|_V)$ horizontal ist. Ist dann $u = [x, 1]$, so gilt

$$\text{Hol}_\gamma^u(B) = \rho(\text{Hol}_{\tilde{\gamma}}^{\tilde{x}}(A)) = \rho([\gamma]) ,$$

also ist $\text{Hol}^u(B) = \rho : \pi_1(M; x) \rightarrow G$ und dies liefert die Surjektivität.

Damit ist das Theorem bewiesen. □

7.6 Zusammenhänge in Tensorprodukten

Betrachten wir nun zwei komplexe Linien-Bündel L_1 und L_2 , dann liefert $L_1 \otimes L_2$ ein neues komplexes Linien-Bündel. Eine interessante Frage ist dann, wie die erste Chern-Klasse $c_1(L_1 \otimes L_2)$ des Tensorprodukts aussieht. Dazu ist es notwendig, dass wir uns zunächst allgemein mit den Zusammenhängen von Tensorprodukten beschäftigen.

Proposition 145: Seien $E \xrightarrow{\pi} M$ und $E' \xrightarrow{\pi'} M$ zwei komplexe Vektorbündel mit den Zusammenhängen ∇ und ∇' . Dann gibt es einen eindeutigen Zusammenhang $\tilde{\nabla}$ in $E \otimes E'$, sodass für alle Schnitte $s \in \Gamma(E)$ und $t \in \Gamma(E')$ gilt

$$\tilde{\nabla}(s \otimes t) = \nabla s \otimes t + s \otimes \nabla' t .$$

Beweis. Auf einer offenen Teilmenge $U \subset M$ seien $\{s_i\}$ und $\{t_j\}$ die lokalen Schnittbasen zu $E|_U$ und $E'|_U$. Einen beliebigen Schnitt des Tensorprodukt-Bündels $E \otimes E' \rightarrow M$ können wir dann lokal als $\sum_{i,j} f_{ij} s_i \otimes t_j$ für glatte Funktionen $f_{ij} : U \rightarrow \mathbb{C}$ darstellen. Es sei dann

$$\tilde{\nabla} \left(\sum_{i,j} f_{ij} s_i \otimes t_j \right) = \sum_{i,j} [df_{ij} \otimes s_i \otimes t_j + f_{ij} (\nabla s_i \otimes t_j + s_i \otimes \nabla' t_j)] , \quad (7.2)$$

so erhalten wir die Eindeutigkeit des Tensorprodukt-Zusammenhangs $\tilde{\nabla}$, falls er existiert. Umgekehrt definiert (7.2) einen gültigen Zusammenhang in $E \otimes E' \rightarrow M$, wir können die Gleichung daher als Definition von $\tilde{\nabla}$ auffassen. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}(f s_i \otimes g t_j) &= \tilde{\nabla}(fg s_i \otimes t_j) = d(fg) \otimes s_i \otimes t_j + fg(\nabla s_i \otimes t_j + s_i \otimes \nabla' t_j) \\ &= g(df) \otimes s_i \otimes t_j + f(dg) \otimes s_i \otimes t_j + fg \nabla s_i \otimes t_j + fg s_i \otimes \nabla' t_j \\ &= [(df) \otimes s_i + f \nabla s_i] \otimes g t_j + f [(dg) \otimes s_i \otimes t_j + g s_i \otimes \nabla' t_j] \\ &= [(df) \otimes s_i + f \nabla s_i] \otimes g t_j + f s_i \otimes [(dg) \otimes t_j + g \nabla' t_j] \\ &= \nabla(f s_i) \otimes g t_j + f s_i \otimes \nabla'(g t_j) , \end{aligned}$$

also erfüllt $\tilde{\nabla}$ die geforderte Eigenschaft der Aussage. Da $\tilde{\nabla}$ lokal eindeutig und wohldefiniert ist, und Zusammenhänge in Vektorbündeln lokale Operationen sind, erhalten wir auch die globale Eindeutigkeit und Existenz. \square

Proposition 146: *In der vorigen Situation gilt für die Krümmung des Tensorprodukts*

$$F_{\tilde{\nabla}} \cdot (s \otimes t) = (F_{\nabla} s) \otimes t + s \otimes F_{\nabla'} t .$$

Beweis. Es sei daran erinnert, dass $F_{\nabla} \in \Omega^2(M, \text{End}(E))$ ist, d.h. es liegt $F_{\nabla} s \in \Omega^2(M; E)$. Da es sich hier um eine lokale Aussage handelt, können wir von $M = \mathbb{R}^n$ ausgehen, d.h. es gilt für die Krümmung des Zusammenhangs (vgl. Beispiel von Seite 59)

$$F_{\nabla} = \sum_{i < j} (dx_i \wedge dx_j) \otimes F_{ij}$$

für Schnitte $F_{ij} \in \Gamma(\text{End}(E))$, also $F_{ij} : E \rightarrow E$. Wir wissen bereits, dass $F_{ij} = [\nabla_i, \nabla_j]$ für $\nabla_i := \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}$ gilt. Unter Verwendung von

$$(\tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_j)(s \otimes t) = \nabla_i \nabla_j s \otimes t + \nabla_i s \otimes \nabla'_j t + s \otimes \nabla'_i \nabla'_j t + \nabla_j s \otimes \nabla'_i t$$

folgt dann für die Komponenten der Krümmung des Tensorprodukts

$$\tilde{F}_{ij}(s \otimes t) = [\tilde{\nabla}_i, \tilde{\nabla}_j](s \otimes t) = (\tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_j - \tilde{\nabla}_j \tilde{\nabla}_i)(s \otimes t) = [\nabla_i, \nabla_j] s \otimes t + s \otimes [\nabla'_i, \nabla'_j] t .$$

Also erhalten wir $\tilde{F}_{ij} s \otimes t = F_{ij} s \otimes t + s \otimes F'_{ij} t$. \square

Korollar 147: *Seien $L \xrightarrow{\pi} M$ und $L' \xrightarrow{\pi'} M$ zwei komplexe Linien-Bündel mit den Zusammenhängen ∇ und ∇' , dann gilt für die Krümmung*

$$F_{\nabla \otimes \nabla'} = F_{\nabla} + F_{\nabla'} ,$$

wobei $\nabla \otimes \nabla'$ der kanonisch induzierte Zusammenhang in $L \otimes L' \xrightarrow{\tilde{\pi}} M$ ist. Insbesondere folgt für die eingangs formulierte Frage dann $c_1(L \otimes L') = c_1(L) + c_1(L') \in H^2(M; \mathbb{C})$.

Beweis. Seien $s \in \Gamma(L)$ und $s' \in \Gamma(L')$ zwei glatte Schnitte der Linien-Bündel, dann folgt

$$F_{\nabla \otimes \nabla'} \cdot (s \otimes s') = F_{\nabla} s \otimes s' + s \otimes F_{\nabla'} s' = (F_{\nabla} + F_{\nabla'}) (s \otimes s')$$

mit $F_{\nabla}, F_{\nabla'} \in \Omega^2(M; \mathbb{C})$. Damit folgt bereits die Aussage. \square

Sei G eine Gruppe und M eine Mannigfaltigkeit, dann definieren wir die Menge

$$\text{Prin}_G(M) := \{ \text{Isomorphismen-Klassen von Hauptfaser-}G\text{-Bündeln über } M \},$$

Insbesondere ist $\text{Prin}_{\text{GL}_1(\mathbb{C})}(M) = \text{Prin}_{\mathbb{C}^\times}(M)$ die Menge der Isomorphismen-Klassen komplexer Linien-Bündel. Dies ist eine abelsche Gruppe unter dem Tensorprodukt, wobei das Inverse durch das duale Bündel L^* gegeben ist, da $L^* \otimes L = \text{Hom}(L, L) = M \times \mathbb{C}$ als triviales Bündel über M das neutrale Element ist. Also ist

$$c_1 : \text{Prin}_{\mathbb{C}^\times}(M) \longrightarrow H^2(M; \mathbb{C})$$

ein Gruppen-Homomorphismus, von dem wir im Folgenden den Kern bestimmen werden.

Lemma 148: Sei $P \xrightarrow{\pi} M$ ein Hauptfaser- G -Bündel und V ein Vektorraum. Weiter sei die Abbildung $\rho : G \times V \times [0, 1] \longrightarrow V$ eine glatte Homotopie, sodass

$$\rho_t : G \times V \longrightarrow V$$

für jedes $t \in [0, 1]$ eine Darstellung der Gruppe G auf V liefert. Dann ist $P \times_{\rho_0} V \longrightarrow M$ isomorph zu $P \times_{\rho_1} V \longrightarrow M$ als Vektorbündel.

Beweis. Setze $E := (P \times [0, 1]) \times_{\rho} V = (P \times [0, 1] \times V)/G$, dies ist ein Bündel über $M \times [0, 1]$, wobei die Gruppe G durch

$$g \cdot (u, t, v) := (tg^{-1}, t, \rho_t(g, v))$$

wirkt. Wähle dann einen Zusammenhang in E , dann liefert uns die Holonomie in $[0, 1]$ -Richtung einen Isomorphismus $E|_{M \times \{0\}} \cong E|_{M \times \{1\}}$. \square

Satz 149: Sei $L \xrightarrow{\pi} M$ ein komplexes Linien-Bündel, dann sind die folgenden vier Aussagen äquivalent:

1. Für die erste Chern-Klasse gilt $c_1(L) = 0 \in H^2(M; \mathbb{C})$.
2. Das Bündel L hat einen flachen Zusammenhang.
3. Das k -fache Tensorprodukt $L^{\otimes k}$ ist ein triviales Bündel für ein $k \in \mathbb{N}$.
4. $L^{\otimes k}$ ist trivial für $k = |\text{Tor}(H_1(M; \mathbb{Z}))|$, wobei damit die Ordnung der Torsion der Homologiegruppe gemeint ist.

Beweis. • „2. \Rightarrow 1.“: Dies ist trivial, da wir $c_1(L) = [-\frac{1}{2\pi i} F_{\nabla}]$ definiert haben.

• „1. \Rightarrow 2.“: Sei ∇ ein beliebiger Zusammenhang in L . Dann ist $c_1(L) = 0$ äquivalent dazu, dass es ein $a \in \Omega^1(M; \mathbb{C})$ mit $da = F_{\nabla}$ gibt. Folglich ist die Krümmung $F_{\nabla - a} = F_{\nabla} - da = 0$, sodass $\nabla - a$ ein flacher Zusammenhang ist.

• „3. \Rightarrow 2.“: Wenn das k -fache Tensorprodukt $L^{\otimes k}$ trivial ist, dann besitzt es den trivialen Zusammenhang - man beachte dazu die Bijektion (vgl. Beispiel von Seite 73)

$$\mathcal{A}(L) \xleftrightarrow{\text{bij.}} \mathcal{A}(L^{\otimes k}) .$$

Da die Krümmung multiplikativ ist, d.h. $F_{\nabla^{\otimes k}} = kF_{\nabla}$, folgt die Aussage.

- „4. \Rightarrow 3.“: Trivial.
- „2. \Rightarrow 4.“: Wenn $L \xrightarrow{\pi} M$ einen flachen Zusammenhang besitzt, dann existiert eine Darstellung $\rho : \pi_1(M; x) \rightarrow \mathbb{C}^\times = \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ der Homotopiegruppe, sodass $L = \tilde{M} \times_{\rho} \mathbb{C}$ gilt, wobei \tilde{M} der universelle Überdeckungsraum sei. Dann erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M; x) & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{C}^\times \\ & \searrow & \nearrow \\ & H_1(M; \mathbb{Z}) = \pi_1/[\pi_1, \pi_1] & \end{array} .$$

Analog erhalten wir $L^{\otimes k} = \tilde{M} \times_{\rho^k} \mathbb{C}$ und damit das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M; x) & \xrightarrow{\rho^k} & \mathbb{C}^\times \\ \downarrow & & \uparrow \\ H_1(M; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{k} & H_1(M; \mathbb{Z}) \end{array}$$

Wenn wir dann die Torsion aus den Homologiegruppen herauskürzen, so erhalten wir eine freie abelsche Gruppe $H_1(M; \mathbb{Z})/\mathrm{Torsion} = \mathbb{Z}^{b_1(M)}$ und damit das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M; x) & \xrightarrow{\rho^k} & \mathbb{C}^\times \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathbb{Z}^{b_1(M)} & \end{array} .$$

Sei dann e_1, \dots, e_n eine Basis für $\mathbb{Z}^{b_1(M)}$, für jedes j wähle eine glatte Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ von $\sigma(e_j)$ nach 1. Dies definiert eine glatte Abbildung

$$r : [0, 1] \times \pi_1(M; x) \rightarrow \mathbb{C}^\times ,$$

sodass $r(t, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus für alle t ist. Insbesondere gilt $r(0, \cdot) = \rho^k$ und $r(1, \cdot) = 1$, sodass wir eine glatte Homotopie $\rho^k \simeq 1$ erhalten. Dann folgt

$$L^{\otimes k} = \tilde{M} \otimes_{\rho^k} \mathbb{C} \approx \tilde{M} \otimes_1 \mathbb{C} = M \times \mathbb{C} ,$$

also ist $L^{\otimes k}$ ein triviales Linien-Bündel über M . □

Bemerkung: Wie wir bereits wissen, hat die erste Chern-Klasse $c_1(L)$ einen natürlichen Lift nach $H^2(M; \mathbb{Z})$. Gleichzeitig ist aber

$$c_1 : \mathrm{Prin}_{\mathbb{C}^\times}(M) \xrightarrow{\cong} H^2(M; \mathbb{Z})$$

auch ein Gruppen-Isomorphismus. Für den Kern des Koeffizientenwechsel-Homomorphismus gilt

$$\ker [H^2(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(M; \mathbb{C})] = \mathrm{Tor}(H^2(M; \mathbb{Z})) \cong \mathrm{Tor}(H_1(M; \mathbb{Z})) .$$

Proposition 150: Sei $P \rightarrow M$ ein Hauptfaser- G -Bündel, wobei die Gruppe G abelsch sei, und A ein flacher Zusammenhang in P . Außerdem sei $\gamma : S^1 \rightarrow P$ eine stetige Schleife mit $x = \gamma(1)$. Gilt dann $\gamma_*[S^1] = 0$ in $H_1(M; \mathbb{Z})$, so gilt $\mathrm{Hol}_\gamma(A) = \mathrm{Id}$.

Beweis. Da die Gruppe G abelsch ist, können wir direkt das Diagramm

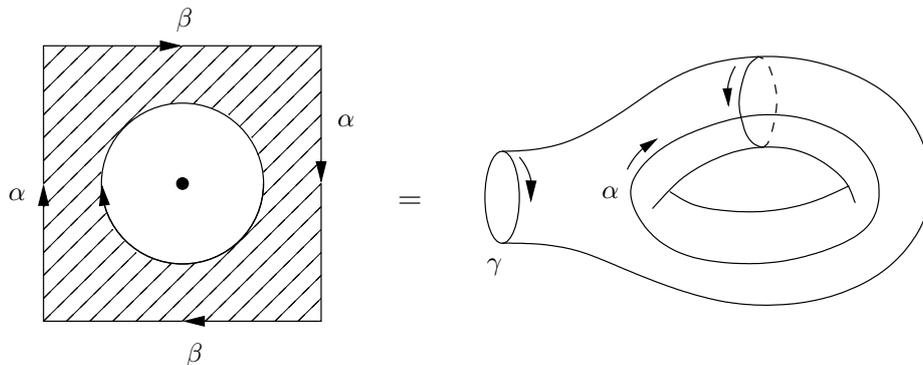
$$\begin{array}{ccc} \text{Hol}(A) : \pi_1(M; x) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \text{Aut}(P_x) \cong G \\ & \searrow & \nearrow \\ & H_1(M; \mathbb{Z}) & \end{array}$$

betrachten und erhalten die Aussage. □

Proposition 151: Sei $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ein Torus und $D \subset T^2$ das Bild der offenen Kreisscheibe $(D_{1/2}^2)^\circ \subset \mathbb{R}^2$ vom Radius $\frac{1}{2}$ nach Quotientenbildung. Ist dann G eine Lie-Gruppe, so sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

1. G ist nicht abelsch.
2. Es existiert ein G -Bündel $P \rightarrow T^2 \setminus D$ mit einem flachen Zusammenhang A , sodass $\text{Hol}_{\partial A}(A) \neq \text{Id}$ gilt.

Beweis. • „2. \Rightarrow 1.“: Dies folgt nach der vorangegangenen Proposition.



• „1. \Rightarrow 2.“ Es gilt $T^2 \setminus D \cong S^1 \vee S^1$, also ist $\pi_1(T^2 \setminus D)$ eine freie Gruppe auf $\{\alpha, \beta\}$ und $\gamma \simeq \beta^{-1}\alpha^{-1}\beta\alpha$. Die Gruppe G ist genau dann nicht abelsch, wenn es einen Homomorphismus $\rho : \pi_1(T^2 \setminus D) \rightarrow G$ mit $\rho(\gamma) \neq 1$ gibt. □

7.7 Flache $\text{SO}(3)$ -Zusammenhänge über dem 2-Torus

Wir wollen die Eigenschaften des 2-Torus im Folgenden noch ein wenig weiter studieren. Für die Fundamentalgruppe eines 2-Torus T^2 gilt $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ bezüglich jeden Stützpunkts.

Proposition 152: Es existiert ein eindeutiges Element von $\text{Hom}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \text{SO}(3))/\text{SO}(3)$, welches einem flachen Zusammenhang in einem nicht-trivialen $\text{SO}(3)$ -Bündel $P \rightarrow T^2$ entspricht.

Beweis. Sei $R := \text{Hom}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \text{SO}(3)) = \{(x, y) \in \text{SO}(3)^2 : xy = yx\}$ die Menge der miteinander kommutierenden $\text{SO}(3)$ -Gruppenelemente. Weiter definiere

$$R_0 := \left\{ (x, y) \in R : \begin{array}{l} \text{es existiert ein glattes } \alpha : [0, 1] \rightarrow \text{SO}(3)^2 \text{ mit} \\ \alpha(0) = (1, 1), \alpha(1) = (x, y) \text{ und } \text{im}(\alpha) \subset R \end{array} \right\}$$

als die Menge der Elemente von R , die sich durch einen glatten Weg miteinander verbinden lassen. Dann ist für $(x, y) \in R_0$ das zugehörige Bündel $P_{xy} \rightarrow \pi T^2$ trivial. Wir können dann eine Fallunterscheidung vornehmen:

1. Für $x = 1$ oder $y = 1$ folgt $(x, y) \in R_0$, dies ist offensichtlich
2. Sind $x, y \neq 1$, dann können wir bis auf Konjugation annehmen, dass

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

gilt, für y folgt damit dann

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Rotation} \\ 0 & A \in SO(2) \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \text{Spiegelung} \end{pmatrix}.$$

Um dies zu sehen, gehe wie folgt vor: Bis auf Konjugation können wir von $y = \text{diag}(1, 1, -1)$ ausgehen. Wegen $xy = yx$ folgt dann $\sin \theta = 0$ und damit $x = \text{diag}(1, -1, -1)$.

Behauptung: Das $SO(3)$ -Bündel $P \xrightarrow{\pi} T^2$, welches der Darstellung $x = \text{diag}(1, -1, -1)$ und $y = (-1, 1, -1)$ entspricht, ist nicht-trivial.

Beweis: Wenn P trivial ist, dann existiert ein Lift zu einem $Sp(1)$ -Bündel Q gemäß

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\quad} & P \\ \tilde{\pi} \searrow & & \swarrow \pi \\ & T^2 & \end{array},$$

wobei $\pi' : Sp(1) \rightarrow SO(3)$ eine zweifache Überlagerung ist. Der flache Zusammenhang in P wird zu einem flachen Zusammenhang in Q geliftet, und entsprechend die Darstellung $\rho : \pi_1(T^2) \rightarrow SO(3)$ zu einer Darstellung nach $Sp(1)$ gemäß

$$\begin{array}{ccc} & & Sp(1) \\ & \nearrow \tilde{\rho} & \downarrow \pi' \\ \pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\rho} & SO(3) \end{array}$$

Folglich existieren dann $\alpha, \beta \in Sp(1)$ mit $\alpha\beta = \beta\alpha$, $\pi(\alpha) = x$ und $\pi(\beta) = y$. Dabei lässt sich $Sp(1)$ als Einheitssphäre in $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}_0$ auffassen. Setzen wir dann $\alpha := a_1 + b_1e_1$ und $\beta = a_2 + b_2e_2$, so gilt für das Quaternionen-Produkt

$$\alpha\beta = a_1a_2 - b_1b_2\langle e_1, e_2 \rangle + a_1b_2e_2 + a_2b_1e_1 + b_1b_2(e_1 \times e_2)$$

Dann ist die Kommutativitätseigenschaft $\alpha\beta = \beta\alpha$ äquivalent zu $e_1 \times e_2 = 0$, d.h. es gilt $e_1 = \pm e_2$, also haben die Matrizen x und y dieselbe Rotationsachse. Betrachten wir aber noch einmal die beiden Diagonalmatrizen der Behauptung, so ist klar, dass dies nicht der Fall sein kann. Also muss die Annahme, dass P ein triviales Bündel ist, falsch sein. \square

Bemerkung: Wenn Σ eine zusammenhängende, geschlossene, orientierte 2-Mannigfaltigkeit ist, dann existieren für $n \geq 3$ genau zwei Isomorphismen-Klassen von $SO(n)$ -Bündeln über Σ , die sich durch die zweite **Stiefel-Whitney-Klasse**

$$w_2(P) \in H^2(\Sigma; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$$

unterscheiden lassen.

1985 wurde eine ähnliche Konstruktion von Mannigfaltigkeiten der nächsthöheren Dimension entdeckt. Ist Y eine geschlossene, zusammenhängende, orientierte (siehe nächstes Kapitel) 3-Mannigfaltigkeit mit $H_1(Y; \mathbb{Z}) = 0$, dann kann die **Casson-Invariante** $\lambda(Y)$ als

$$\lambda(Y) = \frac{1}{2} \#(\mathcal{R}_{Y, \text{SU}(2)} \setminus \mathbf{1}) \in \mathbb{Z}$$

angegeben werden, wobei $\mathbf{1}$ für die triviale Darstellung und „ $\#$ “ für das Zählen der Elemente mit Vorzeichen steht. Eine nützliche Einführung in diese Invariante ist etwa in [Sav99] zu finden.

8 Charakteristische Klassen

8.1 Chern-Klassen

Als nächstes werden wir charakteristische Klassen vom differentialgeometrischen Blickpunkt aus studieren. Als Referenz sei auf [MS74] verwiesen.

Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein komplexes Vektorbündel vom Rang n . Wir werden dann Cohomologieklassen $c_k(E) \in H^{2k}(M; \mathbb{C})$ für $k = 0, \dots, n$ definieren. Wähle dazu einen Zusammenhang ∇ im Bündel E und eine offene Teilmenge $U \subset M$ mit einer Basis von Schnitten s_1, \dots, s_n für $E|_U$. Mit ihrer Hilfe definiere Abbildungen

$$e_{ij} : E|_U \longrightarrow E|_U \quad \text{sodass} \quad e_{ij}(s_k) = \begin{cases} s_i & : j = k \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases},$$

dann können wir den Zusammenhang für $\Omega_{ij} \in \Omega^2(U; \mathbb{C})$ lokal als

$$\nabla = \sum_{i,j} \Omega_{ij} \otimes e_{ij} : \Gamma(E|_U) \longrightarrow \Gamma(T^*U \otimes E|_U)$$

darstellen. Dann ist $\Omega := (\Omega_{ij})$ eine $n \times n$ -Matrix von 2-Formen auf U , und es gilt

$$\det(\mathbb{1} + t\Omega) = \sum_{k=0}^n t^k \sigma_k(\Omega)$$

für entsprechende Koeffizienten $\sigma_k(\Omega) \in \Omega^{2k}(U; \mathbb{C})$. Beim Wechsel der Schnittbasis $\{s_i\}$ muss Ω durch $A\Omega A^{-1}$ für ein passendes $A : U \longrightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ ersetzt werden, d.h. es gilt

$$\sigma_k(\Omega) = \sigma_k(A\Omega A^{-1}),$$

also ist $\sigma_k(\Omega)$ unabhängig von der Wahl der Schnittbasis. Folglich liegt $\sigma_k(\Omega) \in H^{2k}(M; \mathbb{C})$.

Lemma 153: Für die äußere Ableitung der Koeffizienten-2-Formen gilt $d\sigma_k(\Omega) = 0$.

Beweis. Zu einer gegebenen offenen Teilmenge $U \subset M$ mit $x \in U$ können wir eine die Schnittbasis s_1, \dots, s_n so wählen, dass diese kovariant konstant bei x sind, d.h. es gilt dort $\nabla s_i = 0$. Damit erhalten wir auch $\nabla e_{ij} = 0$ bei x , in dem wir ∇ auf $e_{ij}s_j = s_i$ anwenden. Mit dem Bianchi-Theorem folgt dann

$$0 = d_{\nabla} F_{\nabla} = \sum_{i,j} (d\Omega_{ij}) \otimes e_{ij} + \sum_{i,j} \Omega_{ij} \wedge \nabla e_{ij} \stackrel{\text{bei } x}{=} \sum_{i,j} (d\Omega_{ij}) \otimes e_{ij},$$

also gilt $d\Omega_{ij} = 0$ bei x . Für $\alpha_j \in \Omega^{r_j}(M; \mathbb{C})$ mit $d\alpha_j = 0$ bei x für alle j gilt im Allgemeinen dann auch

$$d(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_j) = \sum_j \varepsilon_j \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{j-1} \wedge d\alpha_j \wedge \alpha_{j+1} \wedge \dots \wedge \alpha_r = 0$$

bei x , also erhalten wir damit $d\sigma_k(\Omega) = 0$ bei x . □

Lemma 154: Sei ∇ ein Zusammenhang im Bündel $E \rightarrow M$ und $f : M' \rightarrow M$ eine glatte Abbildung in den Basisraum, dann gilt mit $\nabla' := f^*\nabla$ die Natürlichkeit

$$\sigma_k(\Omega') = f^*\sigma_k(\Omega) ,$$

wobei $\Omega := \Omega_\nabla$ und $\Omega' := \Omega_{\nabla'}$ bezeichnet.

Beweis. Sei s_1, \dots, s_n eine Basis von Schnitten in $E|_U$, dann liefert $s'_i := f^*s_i$ eine Basis von Schnitten im Pullback-Bündel $f^*E|_{f^{-1}(U)}$. Damit erhalten wir dann lokal

$$\nabla s_j = \sum_i \omega_{ij} \otimes s_i \quad \text{und} \quad \nabla' s'_j = \sum_i f^*\omega_{ij} \otimes s'_i$$

und für die Krümmung ergibt sich dann

$$\begin{aligned} F_\nabla s_j &= d_\nabla^2 s_j = \sum_i d_\nabla(\omega_{ij} \otimes s_i) = \sum_i (d\omega_{ij} \otimes s_i - \omega_{ij} \wedge \nabla s_i) \\ &= \sum_i \left(d\omega_{ij} \otimes s_i + \sum_k (\omega_{ki} \wedge \omega_{ij}) \otimes s_k \right) \\ &= \sum_i \left(d\omega_{ij} + \sum_k (\omega_{ik} \wedge \omega_{kj}) \right) \otimes s_i , \end{aligned}$$

also folgt $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ und völlig analog $\Omega' = d\omega' + \omega' \wedge \omega'$. Damit erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \Omega' &= d\omega' + \omega' \wedge \omega' = df^*\omega + f^*\omega \wedge f^*\omega = f^*d\omega + f^*(\omega \wedge \omega) \\ &= f^*(d\omega + \omega \wedge \omega) = f^*\Omega , \end{aligned}$$

und damit ist die Aussage des Lemmas bewiesen, da die $\sigma_k(\Omega)$ Polynome in Ω sind. \square

Lemma 155: Die Cohomologie-Klasse $[\sigma_k(\Omega)] \in H^{2k}(M; \mathbb{C})$ ist unabhängig von der Wahl des Zusammenhangs ∇ .

Beweis. Seien ∇ und ∇' zwei Zusammenhänge im Bündel $E \xrightarrow{\pi} M$. Definiere dann einen weiteren Zusammenhang $\tilde{\nabla}$ in $\mathbb{R} \times E \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathbb{R} \times M$ durch Linearkombination

$$\tilde{\nabla} := (1-t)\pi_2^*\nabla + t\pi_2^*\nabla' ,$$

wobei $\pi_2 : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ eine Projektion ist. Für der Inklusion $j_t : M \hookrightarrow \mathbb{R} \times M$ mit $x \mapsto (t, x)$ erhalten wir dann

$$j_t^*\tilde{\nabla} = (1-t)j_t^*\pi_2^*\nabla + t j_t^*\pi_2^*\nabla' = (1-t)\nabla + t\nabla' .$$

Inbesondere gilt dann $j_0^*\tilde{\nabla} = \nabla$ und $j_1^*\tilde{\nabla} = \nabla'$, also folgt $\sigma_k(\Omega) = j_0^*\sigma_k(\tilde{\Omega})$ und damit erhalten wir dann

$$[\sigma_k(\Omega)] = j_0^*[\sigma_k(\tilde{\Omega})] = j_1^*[\sigma_k(\tilde{\Omega})] = [\sigma_k(\Omega')] .$$

Damit ist die Aussage gezeigt. \square

Definition 156: Wir definieren die k -te **Chern-Klasse** eines komplexen Vektorbündels $E \xrightarrow{\pi} M$ durch

$$c_k(E) := \frac{1}{(-2\pi i)^k} [\sigma_k(\Omega)] \in H^{2k}(M; \mathbb{C}) .$$

Bemerkung: Ähnlich wie bei der schon im Vorfeld definierten ersten Chern-Klasse existiert auf für alle anderen $c_k(E)$ ein natürlicher Koeffizienten-Lift zu $H^{2k}(M; \mathbb{Z})$.

Proposition 157 (Natürlichkeit): Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein komplexes Vektorbündel und die Abbildung $f : M' \rightarrow M$ von Basisräumen glatt, dann gilt

$$f^* c_k(E) = c_k(f^* E) .$$

Proposition 158 (Produkt-Formel): Seien $E \xrightarrow{\pi} M$ und $F \xrightarrow{\pi'} M$ zwei komplexe Vektorbündel, dann gilt

$$c_k(E \oplus F) = \sum_{j=0}^k c_j(E) \smile c_{k-j}(F) .$$

Definieren wir weiter $c(E) := \sum_j c_j(E) \in \bigoplus_j H^j(M; \mathbb{C}) =: H^*(M; \mathbb{C})$ als die **totale Chern-Klasse**, so gilt

$$c(E \oplus F) = c(E)c(F) .$$

Beweis. Wähle zwei Zusammenhänge ∇ bzw. ∇' in E und F , definiere damit dann einen neuen Zusammenhang $\tilde{\omega}$ in der Whitney-Summe $E \oplus F$ durch

$$\tilde{\nabla}_v(s \oplus s') := (\nabla_v s, \nabla'_v s')$$

für $s \in \Gamma(E)$, $s' \in \Gamma(F)$ und $v \in TM$. Sei dann $U \subset M$ offen und s_1, \dots, s_m eine Basis von Schnitten in $E|_U$ und entsprechend s'_1, \dots, s'_n eine Basis von Schnitten in $F|_U$. Definiere dann

$$t_j = \begin{cases} (s_j, 0) & : 1 \leq j \leq m \\ (0, s'_{j-m}) & : m+1 \leq j \leq m+n \end{cases} ,$$

dies liefert eine Schnittbasis für $(E \oplus F)|_U$. Wir erhalten dann Matrizen ω, ω' und $\tilde{\omega}$ der zugehörigen 1-Formen, wobei

$$\tilde{\omega} = \left(\begin{array}{c|c} \omega & 0 \\ \hline 0 & \omega' \end{array} \right) \quad \text{und} \quad \tilde{\Omega} = \left(\begin{array}{c|c} \Omega & 0 \\ \hline 0 & \Omega' \end{array} \right)$$

gilt. Wenn wir dann schließlich noch die Gleichheit

$$\sum_k t^k \sigma_k(\tilde{\Omega}) = \det(\mathbb{1} + t\tilde{\Omega}) = \det(\mathbb{1} + t\Omega) \det(\mathbb{1} + t\Omega') = \left(\sum_k t^k \sigma_k(\Omega) \right) \left(\sum_k t^k \sigma_k(\Omega') \right)$$

betrachten, erhalten wir die Behauptung. □

Korollar 159: Wenn das Bündel $F \rightarrow M$ trivial ist, so gilt $c_k(E \oplus F) = c_k(E)$.

Proposition 160: Sei $E^* = \text{Hom}(E, \mathbb{C})$ das duale Bündel zu $E \rightarrow M$, dann gilt für die Chern-Klasse davon $c_k(E^*) = (-1)^k c_k(E)$.

Beweis. Sei ∇ ein Zusammenhang in E , dann existiert ein eindeutiger Zusammenhang ∇^* in E^* , sodass für alle $\varphi \in \Gamma(E^*)$ und $s \in \Gamma(E)$

$$d(\varphi s) = \nabla^* \varphi \cdot s + \varphi \cdot \nabla s$$

gilt. Sei weiter s_1, \dots, s_m eine Basis von Schnitten für $E|_U$ und s_1^*, \dots, s_m^* die Schnittbasis des dualen Bündels $E^*|_U$. Wegen $s_i^* s_j = \delta_{ij}$ erhalten wir dann

$$0 = d(s_i^* s_j) = \nabla^* s_i^* \cdot s_j + s_i^* \cdot \nabla s_j = \sum_k \omega_{ki}^* s_k^* \cdot s_j + s_i^* \sum_k \omega_{kj} s_k = \omega_{ji}^* + \omega_{ij} ,$$

also erhalten wir die Schiefhermitizität $\omega_{ji}^* = -\omega_{ij}$ bzw. kürzer $\omega^* = -\omega^\dagger$. Ähnlich folgt dann

$$\begin{aligned} \Omega_{ij}^* &= d\omega_{ij}^* + \sum_k \omega_{ik}^* \wedge \omega_{kj}^* = -d\omega_{ji} + \sum_k \omega_{ki} \wedge \omega_{jk} \\ &= -d\omega_{ji} - \sum_k \omega_{jk} \wedge \omega_{ki} = -\Omega_{ji} , \end{aligned}$$

sodass auch hier $\Omega^* = -\Omega^\dagger$ folgt. Damit erhalten wir dann

$$\det(\mathbb{1} + t\Omega^*) = \det(\mathbb{1} - t\Omega^\dagger) = \det(\mathbb{1} - t\Omega) ,$$

also folgt $\sigma_k(\Omega^*) = (-1)^k \sigma_k(\Omega)$. □

8.2 Pontrjagin-Klassen

Sei $E \rightarrow M$ ein reelles Vektorbündel mit dem Zusammenhang ∇ und s_1, \dots, s_n eine Basis von Schnitten in $E|_U$. Dann gilt

$$F(\nabla) \cdot s_j = \sum_i \Omega_{ij} \otimes s_i$$

für $\Omega_{ij} \in \Omega^2(M)$. Wir werden nun $\sigma_k(\Omega) \in H^{2k}(M; \mathbb{R})$ definieren, wobei man den Unterschied der Koeffizienten beachte (die Pontrjagin-Klassen lassen sich als reelles Analogon der Chern-Klassen auffassen).

Lemma 161: Für ungerades k ist $[\sigma_k(\Omega)] = 0$ in $H^{2k}(M; \mathbb{R})$.

Beweis. Wir werden später zeigen, dass $E^* \cong E$ auf nicht kanonische Weise gilt. Mit dem bereits bekannten $[\sigma_k(\Omega^*)] = (-1)^k [\sigma_k(\Omega)]$ folgt dann die Aussage. □

Definition 162: Die k -te **Pontrjagin-Klasse** sind ähnlich der Chern-Klassen für $k = 0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ als

$$p_k(E) := \frac{1}{(2\pi)^{2k}} [\sigma_{2k}(\Omega)] \in H^{4k}(M; \mathbb{R})$$

definiert. Für $2k > n$ gilt $p_k(E) = 0$.

Proposition 163: Der Zusammenhang zwischen Pontrjagin- und Chern-Klassen wird durch die Beziehung $p_k(E) = (-1)^k c_{2k}(E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ hergestellt.

Beweis. Sei ∇ ein Zusammenhang in E und \tilde{E} der induzierte Zusammenhang in $E \otimes \mathbb{C}$. Für $s \in \Gamma(E)$ und $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ gilt dann

$$\tilde{\nabla}(s \otimes f) = \nabla s \otimes f + s \otimes df .$$

Wähle dann weiter eine Basis von Schnitten s_1, \dots, s_n auf $\Gamma(E|_U)$, dann ist $s_1 \otimes 1, \dots, s_n \otimes 1$ eine Basis von $\Gamma((E \otimes \mathbb{C})|_U)$, und wir erhalten

$$F(\tilde{\nabla})(s_j \otimes 1) = F(\nabla)s_j \otimes 1 + s_j \otimes 0 \cdot 1 ,$$

also gilt $\tilde{\Omega} = \Omega$. Durch eine weitere Rechnung erhalten wir dann

$$c_{2k}(E \otimes \mathbb{C}) = \frac{1}{(2\pi i)^{2k}} [\sigma_{2k}(\tilde{\Omega})] = \frac{(-1)^k}{(2\pi)^{2k}} [\sigma_{2k}(\Omega)] = (-1)^k p_k(E) ,$$

und damit ist der Zusammenhang gezeigt. □

Definition 164: Sei $E \rightarrow M$ ein reelles Vektorbündel. Eine **Euklidische Metrik** auf E ist ein glatter Schnitt von $E^* \otimes E^*$, welcher ein inneres Produkt auf jeder Faser E_p für $p \in M$ definiert.

Bemerkung: Wenn $\{s_i\}$ eine Schnittbasis von $E|_U$ für $U \subset M$ offen ist, dann können wir durch das Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis von Schnitten $\{t_i\}$ erhalten, sodass $\{t_i(p)\}$ eine Basis für E_p für jedes $p \in U$ liefert. Auf diese Weise erhalten wir eine lokale Trivialisierung $E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$, welche das innere Produkt beibehält.

Proposition 165: Jedes reelle Vektorbündel besitzt eine Euklidische Metrik.

Beweis. Folgt unmittelbar durch eine Zerlegung der Eins. □

Proposition 166: Sei ∇ ein Zusammenhang in einem Euklidischen Vektorbündel, dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

1. Für jede glatte Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ ist $\text{Hol}_\gamma(\nabla) : E_{\gamma(0)} \rightarrow E_{\gamma(1)}$ eine Isometrie.
2. Für alle glatten Schnitten $s, t \in \Gamma(E)$ gilt

$$d\langle s, t \rangle = \langle \nabla s, t \rangle + \langle s, \nabla t \rangle ,$$

also insbesondere $X\langle s, t \rangle = \langle \nabla_X s, t \rangle + \langle s, \nabla_X t \rangle$ für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$.

3. Ist $U \subset M$ eine offene Teilmenge und s_1, \dots, s_n eine Orthonormalbasis von Schnitten auf $E|_U$, so gilt

$$\nabla s_j = \sum_i \omega_{ij} \otimes s_i$$

für $\omega_{ij} \in \Omega^1(U)$ mit $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$.

Wenn eine dieser (äquivalenten) Bedingungen erfüllt ist, dann nennen wir den Zusammenhang ∇ **orthogonal** bzw. **mit der Metrik kompatibel**.

Beweis. • „2. \Leftrightarrow 3.“: Für jeden Schnitt $s, t \in \Gamma(E|_U)$ für $U \subset M$ offen gilt

$$Q(s, t) = \langle \nabla s, t \rangle + \langle s, \nabla t \rangle - d\langle s, t \rangle \in \Omega(U) .$$

Damit folgt $Q(s_i, s_j) = \langle \sum_k \omega_{ki} \otimes s_k, s_j \rangle + \langle s_i, \sum_k \omega_{kj} \otimes s_k \rangle = \omega_{ji} + \omega_{ij}$, dies beweist bereits die Richtung 2. \Rightarrow 3..

Für den umgekehrten Weg sei $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ eine glatte Funktion und $s, t \in \Gamma(E|_U)$ glatte Schnitte. Dann erhalten wir

$$Q(fs, t) = fQ(s, t) = Q(s, ft) ,$$

also gilt $Q = 0$ genau dann, wenn $Q(s_i, s_j) = 0$ für alle i und j gilt. Damit ist die Äquivalenz dieser beiden Aussagen gezeigt. • „2. \Rightarrow 1.“: Durch v_1, \dots, v_n sei eine Orthonormalbasis von $E_{\gamma(0)}$ gegeben, dann gibt es eindeutige Schnitte $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(\gamma^*E)$, sodass

$$s_i(0) = v_i \quad \text{und} \quad \nabla' s_i = 0$$

für $\nabla' := \gamma^*\nabla$ gilt. Dieses ∇' erfüllt die 2. Eigenschaft, da 3. unter Pullbacks erhalten bleibt [raussuchen!]. Also gilt für $\langle s_i, s_j \rangle : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dann

$$d\langle s_i, s_j \rangle = \langle \nabla' s_i, s_j \rangle + \langle s_i, \nabla' s_j \rangle = 0 .$$

• „1. \Rightarrow 2.“: Dazu verwende die Beschreibung von ∇s durch Holonomie. □

Definition 167: Sei V ein Euklidischer Vektorraum, dann definieren die Lie-Algebra der $\mathbf{SO}(V)$ durch

$$\mathfrak{so}(V) = \{S \in \text{End}(V) : \langle Sv, w \rangle + \langle v, Sw \rangle = 0 \text{ für } s, w \in V\} .$$

Ist weiter $E \rightarrow M$ ein Euklidisches Vektorbündel, so ist $\mathfrak{so}(E) := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times \mathfrak{so}(E_p) \subset \text{End}(E)$ ein Unterbündel.

Proposition 168: Sei $E \rightarrow M$ ein Euklidisches Vektorbündel und ∇ ein orthogonaler Zusammenhang in E , dann gilt

$$\mathcal{A}_0(E) = \{\text{orthogonale Zusammenhänge in } E\} = \nabla + \Omega^1(M; \mathfrak{so}(E)) .$$

Beweis. Es existiert eine entsprechende Abbildung, die Injektivität ist klar, die Surjektivität folgt aus der letzten Proposition. □

Proposition 169: Ist ∇ ein orthogonaler Zusammenhang in E , so gilt $F(A) \in \Omega^2(M; \mathfrak{so}(E))$.

Beweis. Sei s_1, \dots, s_n eine lokale Basis von Schnitten und $\nabla s_j = \sum_i \omega_{ij} \otimes s_i$. Mit

$$F s_j = \sum_i \Omega_{ij} \otimes s_i \quad \text{mit} \quad \Omega_{ij} = d\omega_{ij} + \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$$

folgt dann $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$. □

Definition 170: Sei $E \rightarrow M$ ein Euklidisches Vektorbündel vom Rang n , denn definiere $P_0(E)$ als **Bündel der orthonormalen Rahmen** in E , dies ist ein Hauptfaser- $\mathbf{O}(n)$ -Bündel

$$P_0(E)_p = \{\text{lineare Isometrien } \mathbb{R}^n \rightarrow E_p\}$$

für alle Punkte $p \in M$.

Proposition 171: Es ist $E = P_0(E) \times_{\mathbf{O}(n)} \mathbb{R}^n$ und $A \mapsto \nabla^A$ liefert eine Bijektion

$$\{\text{Zusammenhänge in } P_0(E)\} \xleftrightarrow{\text{bij.}} \{\text{orthogonale Zusammenhänge in } E\} .$$

Beweis. Es gilt $\mathfrak{g}_{P_0(E)} = \mathfrak{so}(E)$ und $\nabla^{A+a} = da + \nabla^A$. □

8.3 Orientierungen

Die $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ lässt sich bezüglich der Determinante in zwei Zusammenhangskomponenten zerlegen. Es bezeichne

$$\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) := \{S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : \det S > 0\} ,$$

dann gilt $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) / \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2$. Sei dann $E \rightarrow M$ ein reelles Vektorbündel, dann definiere

$$\mathcal{O}(E) := P_{\mathrm{GL}}(E) / \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) ,$$

dies ist ein Hauptfaser- $\mathbb{Z}/2$ -Bündel.¹ Dieses Bündel $\mathcal{O}(E)$ liefert eine Orientierungs-Überdeckung von E , wobei $\mathcal{O}(E) \rightarrow M$ eine zweiblättrige Überdeckung ist.

Definition 172: Einen Schnitt von $\mathcal{O}(E)$ bezeichnen wir als **Orientierung des Bündels E** . Dies ist das gleiche wie die Spezifizierung einer Orientierung in jeder Faser E_p , die stetig mit p variiert.

8.4 Euler-Klasse

Zu jedem orientierten reellen Vektorbündel $E \rightarrow M$ vom Rang $2n$ werden wir in diesem Abschnitt eine Cohomologieklass $e(E) \in H^{2n}(M; \mathbb{R})$ definieren. Um dieses $e(E)$ zu definieren, wähle zuerst eine Euklidische Metrik auf E und einen dazu kompatiblen Zusammenhang ∇ , sodass $F(\nabla) \in \Omega^2(M; \mathfrak{so}(E))$ liegt.

Ist dann V ein beliebiger endlichdimensionaler Raum von inneren Produkten

$$V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \langle Sx, y \rangle ,$$

dann erhalten wir einen linearen Isomorphismus $\mathfrak{so}(V) \cong \Lambda^2(V^*) = \Lambda^2 V$, also gilt $\mathfrak{so}(E) \cong \Lambda^2 E$ und

$$F(\nabla) \in \Omega^2(M; \mathfrak{so}(E)) = \Gamma(\Lambda^2(T^*M) \otimes \mathfrak{so}(E)) = \Gamma(\Lambda^2(T^*M) \otimes \Lambda^2 E) .$$

Dabei ist $\Lambda^*(T^*M) \otimes \Lambda^* E$ das faserweise Tensorprodukt von Algebren, d.h. ein Bündel von Algebren. Für jede $k \geq 1$ liegt schließlich noch

$$F(\nabla)^k \in \Gamma(\Lambda^{2k}(T^*M) \otimes \Lambda^{2k} E) = \Omega^{2k}(M; \Lambda^{2k} E) .$$

Es gibt dann einen eindeutigen Zusammenhang $\tilde{\nabla}$ in $\Lambda^* E$, sodass gilt

- $\tilde{\nabla} = \nabla$ auf $\Lambda^1 E$,
- $\tilde{\nabla}(\alpha \wedge \beta) = \tilde{\nabla}\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \tilde{\nabla}\beta$ für alle $\alpha, \beta \in \Lambda^* E$.

Damit erhalten wir $d_{\tilde{\nabla}} : \Omega^r(M; \Lambda^* E) \rightarrow \Omega^{r+1}(M; \Lambda^* E)$, welches eine Schief-Derivation gemäß

$$d_{\tilde{\nabla}}(\varphi \wedge \psi) = d_{\tilde{\nabla}}\varphi \wedge \psi + (-1)^r \varphi \wedge d_{\tilde{\nabla}}\psi$$

für $\varphi \in \Omega^r(M; \Lambda^* E)$ und $\psi \in \Omega^*(M; \Lambda^* E)$ ist.

¹Dazu beachte, dass für ein G -Bündel $P \rightarrow M$ und eine normale abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$ der Quotient P/H allgemein ein Hauptfaser- G/H -Bündel ist.

Es sei nun ein Zusammenhang ∇ im reellen Vektorbündel E gegeben, dann wollen wir einen derartigen Zusammenhang $\tilde{\nabla}$ in $\Lambda^k E$ konstruieren. Dazu sei s_1, \dots, s_n eine Basis von Schnitten von E , sodass $\{s_{i_1} \wedge \dots \wedge s_{i_k}\}_{i_1 < \dots < i_k}$ eine Basis von Schnitten von $\Lambda^k E$ ist. Die Definition von $\tilde{\nabla}$ erfolgt dann durch die Forderung, dass es die beiden zuvor genannten Bedingungen erfüllt sein sollen.

Ein alternativer Weg zur Konstruktion sieht wie folgt aus: Zunächst einmal sei

$$E = P_{\text{GL}}(E) \times_{\text{GL}_n(\mathbb{R})} \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \Lambda^k E = P_{\text{GL}}(E) \times_{\text{GL}_n(\mathbb{R})} \Lambda^k(\mathbb{R}^n),$$

jeder Zusammenhang in $P_{\text{GL}}(E)$ liefert dann einen Zusammenhang in $\Lambda^k E$. Dies zeigt insbesondere die Existenz und Eindeutigkeit.

Seien nun $E_j \rightarrow M$ für $j = 1, 2, 3$ drei Vektorbündel mit den Zusammenhängen ∇_1 für E_1 , ∇_2 für E_2 und ∇ für E_3 . Außerdem sei $E_1 \otimes E_2 \rightarrow E_3$ ein Homomorphismus. Für $s \in \Gamma(E_1)$ und $t \in \Gamma(E_2)$ gilt

$$\nabla(st) = \nabla s \cdot t + s \cdot \nabla t,$$

und damit erhalten wir für $\alpha \in \Omega^r(E_1)$ sowie $\beta \in \Omega^*(E_2)$ wieder die Schief-Derivations-Regel

$$d_{\nabla}(\alpha \wedge \beta) = d_{\nabla_1} \alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d_{\nabla_2} \beta.$$

Für unsere Konstruktion betrachten wir dann im Weiteren $E_1 = E_2 = E_3 = \Lambda^* E$.

Lemma 173: Für alle $k \geq 1$ gilt $d_{\tilde{\nabla}} F(\nabla)^k = 0$.

Beweis. Das Lemma folgt durch Induktion über k , wobei für den Induktionsschritt

$$d_{\tilde{\nabla}} F(\nabla)^{k+1} = \underbrace{d_{\tilde{\nabla}} F(\nabla)}_{0 \text{ nach Bianchi}} \wedge F(\nabla)^k + F(\nabla) \wedge d_{\tilde{\nabla}} F(\nabla)^k$$

durch eine explizite Berechnung folgt. □

Proposition 174: Für $f \in I_k(H, \mathcal{F})$ gilt $(f \circ \rho_*)[P] = f[Q] \in H^{2k}(M; \mathcal{F})$.

Beweis. Betrachte $(f \circ \rho_*)[P] = \widetilde{(f \circ \rho_*)}(F_A) = \tilde{f}(F_B) = f[Q]$. □

Proposition 175: Sei $E \rightarrow M$ ein komplexes Vektorbündel vom Rang n , dann ist liegt die k -te Chern-Klasse $c_k(E) \in H^{2k}(M; \mathbb{C})$ im Bild von $H^{2k}(M; \mathbb{R})$.

Beweis. Wähle eine hermitesche Metrik auf E , denn sei $P_U(E)$ das Bündel der unitären Rahmen (dies ist ein Hauptfaser- $U(n)$ -Bündel), wobei die Fasern durch

$$P_U(E)_x = \{ \text{unitäre Abbildungen } \mathbb{C}^n \rightarrow E_x \}$$

gegeben sind. Folglich ist $P_U(E) \rightarrow P_{\text{GL}_{\mathbb{C}}}(E)$ ein Bündel-Homomorphismus bezüglich der Gruppe $U(n) \subset \text{GL}_n(\mathbb{C})$, denn es gilt $\mathfrak{u}(n) := \text{Lie } U(n) \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) := \text{Lie } \text{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Dabei gilt $\mathfrak{u}(n) = \{S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) : S^* = -S\}$. Betrachte dann die Abbildung

$$\mathfrak{u}(n) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \xrightarrow{i^{-k} \sigma_k} \mathbb{C}$$

Für alle Matrizen $S \in \mathfrak{u}(n)$ existiert dann ein $T \in U(n)$ mit der Diagonalisierungseigenschaft

$$TST^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 i & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n i \end{pmatrix}$$

für $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Es gilt dann

$$\sum_{k=0}^n \sigma_k(s) t^k = \det(\mathbb{1} + tS) = \det(\mathbb{1} + tTST^{-1}) = \prod_{k=1}^n (1 + t\lambda_k) ,$$

also liegt $i^{-k} \sigma_k(S) \in \mathbb{R}$. Effektiv haben wir also nun die Situation

$$\begin{array}{c} \mathfrak{u}(n) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \\ \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \end{array} \right) i^{-k} \sigma_k \end{array}$$

konstruiert. Es folgt dann mit der Definition der $\sigma_k(E)$

$$(2\pi)^k \sigma_k(E) = i^{-k} \sigma_k[P_{\text{GL}_\mathbb{C}}(E)] = i^{-k} \sigma_k[P_{\text{U}}(E)] \in H^{2k}(M; \mathbb{R}) ,$$

und damit haben wir die Aussage gezeigt. □

Definition 176: Sei nun V ein orientierter Euklidischer Vektorraum der Dimension m . Eine m -Form $\omega \in \Lambda^m V \cong \mathbb{R}$ heißt **Volumenform**, wenn für eine positiv orientierte Orthonormalbasis e_1, \dots, e_m von V dann $\omega = e_1 \wedge \dots \wedge e_m$ gilt.

Eine Volumenform ω ist unabhängig von der Wahl der Basis: Ist $S \in \text{End}(V)$, dann entspricht $S_* : \Lambda^m V \rightarrow \Lambda^m V$ der Multiplikation mit $\det S$, d.h. für orthogonale Abbildungen S (also Basiswechsel) gilt insbesondere $\det(S) = 1$. Führt man dies faserweise in E durch, dann erhält man ein $\omega \in \Gamma(\Lambda^{2n} E)$. Es gilt dann

$$F(\nabla)^n \in \Gamma(\Lambda^{2n}(T^*M) \otimes \Lambda^{2n} E) ,$$

also gilt $F(\nabla)^n = e(\nabla) \otimes \omega$ für $e(\nabla) \in \Omega^{2n}(M)$. Man kann fragen, ob $e(\nabla)$ geschlossen ist. Wir wissen

$$0 = d_{\bar{\nabla}} F(\nabla)^n = d_{\bar{\nabla}}(e(\nabla) \otimes \omega) = de(\nabla) \otimes \omega + (-1)^{2n} e(\nabla) \wedge d_{\nabla} \omega$$

und es gilt $d_{\nabla} \omega = \nabla \omega$.

Lemma 177: *Es gilt $\nabla \omega = 0$.*

Beweis 1. Für einen gegebenen Punkt $p \in M$ können wir eine positiv orientierte Orthonormalbasis $s_1, \dots, s_{2n} \in \Gamma(E|_U)$ in einer offenen Umgebung $U \subset M$ des Punkts p wählen, sodass $\nabla s_j = 0$ bei p für jedes j gilt. Es ist also $(s_1, \dots, s_{2n}) \in \Gamma(P_{\text{SO}}(E|_U))$, man wähle diesen Schnitt horizontal bei p . Dann gilt in U für die Volumenform $\omega = s_1 \wedge \dots \wedge s_{2n}$, und damit folgt

$$\nabla \omega = \sum_{k=1}^{2n} s_1 \wedge \dots \wedge s_{k-1} \wedge \nabla s_k \wedge s_{k+1} \wedge \dots \wedge s_{2n} \stackrel{\text{bei } p}{=} 0 ,$$

was gerade gezeigt werden sollte. □

Beweis 2. Alternativ können wir $\omega \in \Lambda^{2n}(\mathbb{R}^{2n})$ als festen Punkt unter der Wirkung von $\text{SO}(2n)$ auffassen, dann definiert ω einen kovariant konstanten Schnitt von

$$\Lambda^{2n} E = P_{\text{SO}}(E) \times_{\text{SO}(2n)} \Lambda^{2n}(\mathbb{R}^{2n}) .$$

Auf diese Weise erhalten wir dann ebenfalls die Aussage. □

Kehren wir nun zur ursprünglichen Konstruktion zurück, dann erhalten wir mit diesen Ergebnissen

$$0 = de(\nabla) \otimes \omega + e(\nabla) \wedge d_{\nabla}\omega = de(\nabla) \otimes \omega + e(\nabla) \wedge \underbrace{\nabla\omega}_0 = de(\nabla) \otimes \omega ,$$

und da die Volumenform überall $\omega \neq 0$ erfüllt, muss dann $de(\nabla) = 0$ sei, also ist $e(\nabla)$ geschlossen.

Lemma 178: Die Cohomologie-Klasse $[e(\nabla)] \in H^{2n}(M; \mathbb{R})$ ist unabhängig vom Zusammenhang ∇ .

Beweis. Der Beweis ist derselbe wie bei den Chern-Klassen. □

Lemma 179: Es sei $\text{Sym}_k^+ := \{\text{positive symmetrische } n \times n\text{-Matrizen}\}$, dies ist eine offene Teilmenge von der symmetrischen Matrizen Sym_k . Dann ist die Abbildung

$$\sigma : \text{Sym}_k^+ \longrightarrow \text{Sym}_k^+ \quad S \mapsto S^2$$

ein Diffeomorphismus.

Beweis. Nach dem Spektralsatz ist σ bijektiv. Man überprüfe noch, dass $d\sigma_S$ bijektiv bei jedem $S \in \text{Sym}_k^+$ ist. □

Wir notieren von nun an $\sigma^{-1}(s)$ durch \sqrt{s} , man beachte dazu, dass $\sqrt{\cdot}$ glatt ist.

Lemma 180: Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ eine weitere Euklidische Metrik auf E , dann existiert ein linearer Automorphismus $\varphi : E \xrightarrow{\cong} E$, sodass

$$\langle s, t \rangle' = \langle \varphi s, \varphi t \rangle$$

für alle $p \in M$ und $s, t \in E_p$ gilt.

Beweis. Für $s' \in E_p$ erhalten wir eine Abbildung $\langle s', \cdot \rangle' : E_p \longrightarrow \mathbb{R}$, dann existiert ein eindeutiges $s \in E_p$, sodass $\langle s', \cdot \rangle' = \langle s, \cdot \rangle$ gilt. Dann gilt also $\psi s' = s$, sodass

$$\begin{array}{ccc} E_p & \xrightarrow{\psi} & E_p \\ & \searrow & \swarrow \\ & & E_p^* \\ & \swarrow & \searrow \\ x \mapsto \langle x, \cdot \rangle & & x \mapsto \langle x, \cdot \rangle' \end{array}$$

kommutiert. Mit $\varphi := \sqrt{\psi}$ folgt dann $\langle \varphi s, \varphi t \rangle = \langle \varphi^2 s, t \rangle = \langle s', t \rangle = \langle s, t \rangle'$. □

Lemma 181: Die Cohomologie-Klasse $[e(\nabla)] \in H^{2n}(M; \mathbb{R})$ ist unabhängig von der Metrik.

Beweis. Trivial / Übung. □

Definition 182: Wir definieren die **Euler-Klasse** eines reellen, orientierten Vektorbündels vom Rang $m := 2n$ als die Cohomologie-Klasse

$$e(E) := \frac{1}{n!(-2\pi)^n} [e(\nabla)] \in H^{2n}(M; \mathbb{R}) .$$

Für m ungerade setze $e(E) = 0 \in H^m(M; \mathbb{R})$, während für $\text{Rang } E = 0$ die Euler-Klasse durch $e(E) = 1 \in H^0(M; \mathbb{R})$ definiert wird.

Proposition 183: Es gilt $e(\bar{E}) = -e(E)$ wenn \bar{E} das Bündel umgekehrter Orientierung ist.

Beweis. Nur $F(\nabla)^n = e(\nabla) \otimes \omega$ wurde die Orientierung verwendet. □

Proposition 184: Seien $E_j \rightarrow M$ für $j = 1, 2$ zwei reelle, orientierte Vektorbündel vom Rang n_j , dann gilt die Produkt-Formel

$$e(E_1 \oplus E_2) = e(E_1) \smile e(E_2) \in H^{n_1+n_2}(M; \mathbb{R}) . \tag{8.1}$$

Beweis. Definiere $n := n_1 + n_2$. Wir unterteilen den Beweis in mehrere Fälle:

- n_1 ungerade: $E_1 \oplus E_2 \rightarrow E_1 \oplus E_2$ mit $(v_1, v_2) \mapsto (-v_1, v_2)$ ist ein orientierungs-umkehrender Automorphismus, nach der vorigen Proposition gilt also

$$e(E_1 \oplus E_2) = -e(E_1 \oplus E_2) ,$$

beide Seiten der Gleichung (8.1) verschwinden also.

- n_2 ungerade: Man geht analog vor.
- $n_1 = 0$ oder $n_2 = 0$: Trivial.
- $n_j = 2m_j \geq 2$: Definiere $m := m_1 + m_2$ und wähle Euklidische Metriken und kompatible Zusammenhänge ∇_j in E_j . Dann erhalten wir eine induzierte Metrik und einen kompatiblen Zusammenhang $\nabla = \nabla_1 \oplus \nabla_2$. Weiter ist $\Lambda^* E_j \subset \Lambda^*(E_1 \oplus E_2) =: \Lambda^* E$ und für die Krümmung gilt

$$F(\nabla) = F(\nabla_1) + F(\nabla_2) \in \Gamma(\Lambda^2(T^*M) \otimes \Lambda^2 E) .$$

Wenn $a = F(\nabla_1)$ und $b = F(\nabla_2)$ miteinander kommutieren (das tun sie, da alle Formen von ungerader Ordnung sind), verwende die allgemeine binomische Formel $(a + b)^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} a^j b^{m-j}$. Dann gilt

$$F(\nabla)^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} F(\nabla_1)^j F(\nabla_2)^{m-j} = \frac{m!}{m_1! m_2!} F(\nabla_1)^{m_1} F(\nabla_2)^{m_2}$$

mit $j = m_1$. Wir haben dann $F(\nabla_j)^{m_j} = e(\nabla_j) \otimes \omega_j$ und $\omega_1 \wedge \omega_2 = \omega$ liefert die Volumenform auf E . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{m!} e(\nabla) &= \frac{1}{m_1!} e(\nabla_1) \wedge \frac{1}{m_2!} e(\nabla_2) \\ \iff \frac{1}{m!(-2\pi)^m} e(\nabla) &= \frac{1}{m_1!(-2\pi)^{m_1}} e(\nabla_1) \wedge \frac{1}{m_2!(-2\pi)^{m_2}} e(\nabla_2) . \end{aligned}$$

Damit ist die Produktformel für die Euler-Klasse bewiesen. □

8.5 Multilineare Abbildungen

Zur Vorbereitung betrachten wir zunächst kurz polynomiale Abbildungen. Dazu sei wie üblich der Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} gewählt. Es seien dann V und W zwei \mathbb{K} -Vektorräume endlicher Dimension. Dann bezeichnen wir

$$\begin{aligned} \text{Pol}_k(V, W) &:= \{ \text{homogene Polynom-Abbildung } V \rightarrow W \text{ vom Grad } k \} \quad \text{und} \\ \text{Pol}(V, W) &:= \{ \text{Alle Polynom-Abbildung } V \rightarrow W \} = \bigoplus_{k \geq 0} \text{Pol}_k(V, W) \end{aligned}$$

Hat W zusätzlich die Struktur einer (assoziativen, kommutativen) \mathbb{K} -Algebra, dann ist $\text{Pol}(V, W)$ ebenfalls eine \mathbb{K} -Algebra. Weiter bezeichnen wir mit

$$\text{Sym}_k(V, W) := \{ \text{symmetrische, multilineare Abbildungen } \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{-fach}} \rightarrow W \}.$$

Ist W eine \mathbb{K} -Algebra, dann lässt sich durch Definition einer Multiplikation

$$\begin{aligned} \text{Sym}_k(V, W) \times \text{Sym}_l(V, W) &\rightarrow \text{Sym}_{k+l}(V, W) \quad (f, g) \mapsto f \cdot g \\ f \cdot g(v_1, \dots, v_{k+l}) &= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \end{aligned}$$

der Raum $\text{Sym}(V, W) := \bigoplus_{k \geq 0} \text{Sym}_k(V, W)$ zu einer \mathbb{K} -Algebra machen.

Proposition 185: Die Abbildung $\varphi : \text{Sym}_k(V, W) \rightarrow \text{Pol}_k(V, W)$, definiert durch

$$f \mapsto \left(\varphi_k f : v \mapsto (vf)(v) = f(v, \dots, v) \right)$$

ist ein linearer Isomorphismus. Ist W zusätzlich eine Algebra, dann ist φ sogar ein Algebra-Isomorphismus.

Beweis. Wenn W eine Algebra ist, dann ist die zusätzliche Eigenschaft, dass auch φ ein Algebren-Homomorphismus ist, offensichtlich.

Um zu zeigen, dass φ_k ein Isomorphismus ist, können wir $W = \mathbb{K}$ und $V = \mathbb{K}^n$ annehmen. Wenn x_1, \dots, x_n die Koordinaten in \mathbb{K}^n sind, dann definiere die Abbildung durch

$$\begin{aligned} \psi_k : \text{Pol}_k(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) = \text{Pol}_k(\mathbb{K}^n) &\rightarrow \text{Sym}_k(\mathbb{K}^n) \\ \psi_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})(v_1, \dots, v_k) &:= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} v_{\sigma(1), i_1} \cdots v_{\sigma(k), i_k} \end{aligned}$$

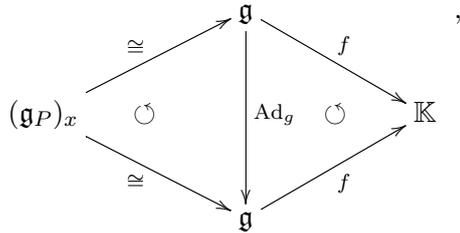
für $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n$, wobei $v_{i,j}$ die j -te Komponente von v_i meint. Dann gilt offensichtlich $\varphi_k \circ \psi_k = \text{Id}$ und die Linearität der Abbildung ist offensichtlich.

Wir müssen nun zeigen, dass $\dim(\text{Pol}_k(\mathbb{K}^n)) = \dim(\text{Sym}_k(\mathbb{K}^n))$ gilt. Eine Basis der homogenen Polynome vom Grad k in \mathbb{K}^n ist durch

$$\{ x_{i_1} \cdots x_{i_k} : 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n \}$$

gegeben. Ein Element von $\text{Sym}_k(\mathbb{K}^n)$ ist durch die Werte auf den Einheitsvektoren $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ für $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ spezifiziert, und diese können beliebig gewählt werden. Also sind die Dimensionen gleich und damit erhalten wir eine lineare Bijektion, einen den gesuchten Isomorphismus. \square

$A := \Lambda^*(T_p^*M)$ als die reelle äußere Algebra, dann kommutiert das Diagramm



wir erhalten also eine wohldefinierte Polynom-Funktion $(\mathfrak{g}_P)_x \rightarrow \mathbb{K}$, diese ist ein Element von $\text{Pol}_k((\mathfrak{g}_P)_x, \mathbb{K})$ und damit auch ein Element von $\text{Pol}_k(A \otimes (\mathfrak{g}_P)_x, A \otimes \mathbb{K}) \ni \tilde{f}$. Dann liegt

$$\tilde{f}(F_B) \in \Gamma(\Lambda^{2k}(T^*M) \otimes \mathbb{K}) = \Omega^{2k}(M; \mathbb{K}) .$$

Die Aussage $d_B F_B = 0$ des Bianchi-Theorems überträgt sich dann in $d\tilde{f}(F_B) = 0$. Haben wir dann eine glatte Abbildung $h : M' \rightarrow M$, so gilt

$$h^*(\mathfrak{g}_P) = \mathfrak{g}_{h^*(P)} \quad \text{und} \quad h^*(F_B) = F_{h^*(B)} ,$$

also folgt $\tilde{f}(F_{h^*(B)}) = h^*(\tilde{f}(F_B))$.

Proposition 186: Die Cohomologie-Klasse $[\tilde{f}(F_B)] \in H^{2k}(M; \mathbb{K})$ ist unabhängig von der Wahl des Zusammenhangs.

Beweis. Verläuft analog zu den Chern-Klassen. □

Wir definieren dann $f[P] := [\tilde{f}(F_B)]$ und erhalten damit die eingangs spezifizierte Abbildung. Es sei angemerkt, dass $I_*(G; \mathbb{K}) \rightarrow H^*(M; \mathbb{K})$ insbesondere einen Algebra-Homomorphismus liefert. Wir wollen nun anhand einiger Beispiele verdeutlichen, welchen Zweck diese Konstruktion überhaupt erfüllt.

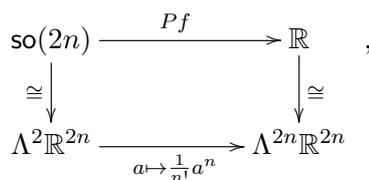
Beispiel: 1. Sei $G = \text{GL}_n(\mathbb{C})$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für $\sigma_k \in I_k(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}); \mathbb{C})$ gilt dann

$$\det(\mathbb{1} + tS) = \sum_{k=0}^n \sigma_k(S) t^k .$$

Ist weiter dann $P \rightarrow M$ ein $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ -Bündel, so entspricht $\frac{1}{(-2\pi i)^k} \sigma_k[P]$ der k -ten Chern-Klasse $c_k(P)$ des Bündels.

2. Sei $G = \text{GL}_n(\mathbb{R})$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Für $\sigma_k \in I_k(\mathbb{M}_n(\mathbb{R}); \mathbb{R})$ folgt analoges wie oben, und $\frac{1}{(2\pi)^{2k}} \sigma_{2k}[P]$ entspricht der k -ten Pontrjagin-Klasse $p_k(P)$.

3. Zuletzt betrachte $G = \text{SO}(n)$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Betrachte dann das Diagramm



so entspricht $Pf[P]$ schließlich der Euler-Klasse $e(P)$.

Lemma 187: Seien G und H zwei Lie-Gruppen und $\rho : G \rightarrow H$ glatte Homomorphismen. Dann gilt für alle $g \in G$ und $\xi \in \mathfrak{g}$

$$\rho_* \operatorname{Ad}_g(\xi) = \operatorname{Ad}_{\rho(g)}(\rho_*\xi) .$$

Beweis. Die induzierte Abbildung ρ_* entspricht der Ableitung von ρ bei der Identität. Mit der Kettenregel folgt dann durch explizite Berechnung

$$\begin{aligned} \rho_* \operatorname{Ad}_g(\xi) &= \rho_* \left. \frac{d}{dt} \right|_0 g \exp(t\xi) g^{-1} = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \rho(g \exp(t\xi) g^{-1}) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \rho(g) \exp(t\rho_*\xi) \rho(g)^{-1} = \operatorname{Ad}_{\rho(g)}(\rho_*\xi) , \end{aligned}$$

und damit erhalten wir bereits die Aussage. \square

Korollar 188: Die Abbildung $I_k(H; \mathbb{K}) \rightarrow I_k(G; \mathbb{K})$ mit $f \mapsto f \circ \rho_*$ ist wohldefiniert.

Sei nun $P \rightarrow M$ ein G -Bündel und $Q \rightarrow M$ ein H -Bündel, sowie $\varphi : P \rightarrow Q$ ein Bündel-Homomorphismus bezüglich ρ , d.h. es gilt $\varphi(ug) = \varphi(u)\rho(g)$ für alle $u \in P$ und $g \in G$. Weiter seien $G \rightarrow \operatorname{Aut}(V)$ und $H \rightarrow \operatorname{Aut}(W)$ Darstellungen der beiden Bündelgruppen und $r : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G \times V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ H \times W & \longrightarrow & W \end{array}$$

kommutiert. Dann lässt sich von $\varphi \times r : P \times V \rightarrow Q \times W$ ein Homomorphismus von Vektorbündeln $P \times_G V \rightarrow Q \times_H W$ über M ableiten.

Beispiel: Betrachten wir die adjungierten Darstellungen von $V = \mathfrak{g}$ und $W = \mathfrak{h}$, dann gilt (man beachte die leichte Notationsproblematik an dieser Stelle: es ist $\mathfrak{h} := \operatorname{Lie} H$, aber \mathfrak{g}_Q ist das Lie-Algebren-Bündel zum Bündel mit H)

$$P \times_G \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_P \quad \text{und} \quad Q \times_H \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_Q ,$$

also erhalten wir den Vektorbündel-Homomorphismus $\varphi_* : \mathfrak{g}_P \rightarrow \mathfrak{g}_Q$.

Lemma 189: Wir betrachten die Situation vor dem Beispiel. Sei A ein Zusammenhang in P und $B := \varphi(A)$, dann gilt $\varphi_* F_A = F_B$ mit $F_A \in \Omega^2(M; \mathfrak{g}_P)$ und $F_B \in \Omega^2(M; \mathfrak{g}_Q)$.

Beweis. Da es sich um eine lokale Aussage handelt, können wir davon ausgehen, dass P einen Schnitt σ hat, dann liegt $\tau := \varphi \circ \sigma \in \Gamma(Q)$. Sei $x \in M$ und $v, w \in T_x M$, sowie $\tilde{F}_A \in \Omega^2(P; \mathfrak{g})$. Aus einer früheren Untersuchung kennen wir

$$\rho_* \tilde{F}_A = \varphi^* \tilde{F}_B \in \Omega^2(Q; \mathfrak{h})$$

für den Lie-Algebren-Homomorphismus $\rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\mathfrak{g}_P)_x \ni F(A)_x(v, w) &= [\sigma(x), \tilde{F}(A)(\sigma_* v, \sigma_* w)] \xrightarrow{\varphi_*} [\varphi(\sigma(x)), \rho_* \tilde{F}(A)(\sigma_* v, \sigma_* w)] \\ &= [\tau(x), \underbrace{\tilde{F}(B)}_{\tau_*}(\underbrace{\rho_* \sigma_* v}_{\tau_*}, \underbrace{\rho_* \sigma_* w}_{\tau_*})] = F(B)_x(v, w) \end{aligned}$$

und die Aussage ist bewiesen. \square

Proposition 190: Für jede schiefsymmetrische Matrix $S \in \mathfrak{so}(2n)$ erhält man eine Abbildung

$$Pf(s)^2 = \det(S) = \sigma_{2n}(S) \iff \left(\frac{1}{(-2\pi)^n} Pf(S) \right)^2 = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \sigma_{2n}(S),$$

also erhalten wir $e(E)^2 = p_n(E) \in H^{2n}(M; \mathbb{R})$ für die Beziehung zwischen Euler- und Pontrjagin-Klasse.

Beweis. Für jedes $S \in \mathfrak{so}(2n)$ existiert ein $T \in \mathbf{SO}(2n)$, sodass die Ähnlichkeitstransformation das Lie-Gruppenelement auf die 2×2 -Blockdiagonalform

$$TST^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -\lambda_1 & & \\ \lambda_1 & 0 & & \\ \hline & & \ddots & \\ & & & 0 & -\lambda_n \\ & & & \lambda_n & 0 \end{array} \right) \quad \text{mit } \lambda_j \in \mathbb{R}$$

bringt. Sei dann $\alpha : \mathfrak{so}(2n) \xrightarrow{\cong} \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n})$ definiert durch

$$\alpha(TST^{-1}) := \sum_{i=1}^n \lambda_i e_{2i-1} \wedge e_{2i}$$

für e_1, \dots, e_{2n} als Standardbasis. Insbesondere gilt dann $Pf(S) = Pf(TST^{-1})$. Mit der $2n$ -Form

$$\frac{1}{n!} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_{2j-1} \wedge e_{2j} \right)^n = \lambda_1 \cdots \lambda_n \underbrace{e_1 \wedge \dots \wedge e_{2n}}_{\text{Volumenform } \omega}$$

auf \mathbb{R}^n gilt dann $Pf(S) = Pf(TST^{-1}) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ und für die Determinante folgt

$$\det S = \det(TST^{-1}) = \lambda_1^2 \cdots \lambda_n^2,$$

damit ist die Aussage bewiesen. □

Sei W ein komplexer Vektorraum der Dimension n , dann erhält dieser Raum als reeller Vektorraum betrachtet eine kanonische Orientierung, die wie folgt entsteht: Sei (e_1, \dots, e_n) eine (komplexe) Basis von W über \mathbb{C} , dann betrachten wir die komplexen Vektoren

$$(e_1, ie_1, \dots, e_n, ie_n)$$

als eine Basis über \mathbb{R} . Wir definieren dies als die **kanonische positive Orientierung** eines komplexen Vektorraums. Dies ist insbesondere Wohldefiniert, da die $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ zusammenhängend ist - dies folgt aus der Tatsache, dass jedes Element von $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ konjugiert zu einer oberen Dreiecksmatrix ist.

Proposition 191: Sei $E \rightarrow M$ ein komplexes Vektorbündel vom Rang n , dann gilt die Gleichheit $c_n(E) = e(E_{\mathbb{R}}) \in H^{2n}(M; \mathbb{R})$, wobei $E_{\mathbb{R}}$ als das dem komplexen Vektorbündel zugrundeliegende reelle orientierte $2n$ -Vektorbündel aufzufassen ist.

Beweis. Wähle eine hermitesche Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ auf E , dann liefert $\langle \cdot, \cdot \rangle := \Re \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ eine euklidische Metrik auf $E_{\mathbb{R}}$. Identifiziere dann $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ durch

$$(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \mapsto (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n),$$

dann erhalten wir einen natürlichen Bündel-Homomorphismus (bezüglich $\rho : U(n) \hookrightarrow SO(2n)$) $P_U(E) \rightarrow P_{SO}(E_{\mathbb{R}})$. Für ein $x \in U$ ist dabei

$$P_U(E)_x = \{ \text{unitäre Abbildungen } \mathbb{C}^n \rightarrow E_x \},$$

dann genügt es zu zeigen, dass das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{u}(n) & \xrightarrow{\rho_*} & \mathfrak{so}(2n) \\ & \searrow \text{Pf} & \swarrow \text{Pf} \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

$i^{-n} \det$ \circlearrowright

kommutiert. Um dies zu beweisen, betrachten wir, dass für alle $S \in \mathfrak{u}(n)$ ein $T \in U(n)$ mit

$$TST^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n i \end{pmatrix} \implies \rho_*(TST^{-1}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -\lambda_1 & & \\ \lambda_1 & 0 & & \\ \hline & & \ddots & \\ & & & 0 & -\lambda_n \\ & & & \lambda_n & 0 \end{array} \right)$$

existiert, dann folgt $i^{-n} \det S = \lambda_1 \cdots \lambda_n = Pf(\rho_* S)$ und wir sind fertig. □

8.7 Berechnungen von $I_*(G) = I_*(G; \mathbb{R})$

Sei G eine kompakte Lie-Gruppe und $T \subset G$ ein maximaler Torus, also $T \cong \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$. Da T zusammenhängend ist, gilt $T \subset G_0$, wobei G_0 die G -Zusammenhangskomponente mit der Identität ist. Setze

$$N = \{g \in G : gTg^{-1} = T\} = \{g \in G : \text{Ad}_g(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}\},$$

wobei $\mathfrak{t} := \text{Lie } T$ sei. Dann gilt $T \subset N$ und die (endliche) **Weyl-Gruppe** $W := N/T$ ist wohldefiniert. Die Konjugations-Wirkung von N auf T wird dann zu einer Wirkung von W auf T , da T abelsch ist. Definiere dann

$$I^W(T) := \{W\text{-invariante Polynom-Abbildungen } \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Wegen $G_0 = \bigcup_{g \in G_0} gTg^{-1}$ bzw. $\mathfrak{g} = \bigcup_{g \in G_0} \text{Ad}_g(\mathfrak{t})$ ist dann die Einschränkungabbildung

$$I(G) \rightarrow I^W(T)$$

injektiv (sie ist außerdem surjektiv, aber das benötigen wir nicht). Ist G kompakt und zusätzlich zusammenhängen, so gilt sogar

$$I_*(G) \cong H^*(BG; \mathbb{R}) \quad \text{bzw.} \quad I_{2k}(G) \cong H^{2k}(BG; \mathbb{R}),$$

wie H. Cartan 1950 bewies.

Beispiel: Wir betrachten $G = U(n)$ als kompakte Lie-Gruppe, dann ist der maximale Torus durch

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{pmatrix} : |z_j| = 1 \right\}$$

gegeben.² Sei $g \in G$ ein Gruppenelement mit $\text{Ad}_g(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$, dann wirkt Ad_g auf \mathfrak{t} durch Permutation der Einträge, da $g\xi g^{-1}$ und ξ die gleichen Eigenwerte haben. Sei

$$g : N \longrightarrow \mathfrak{S}_n = \{\text{symmetrische Gruppe von } n \text{ Elemente}\} .$$

Haben $g \in \ker h$ und $\xi \in \mathfrak{t}$ unterschiedliche Einträge, dann muss g wegen $g\xi = \xi g$ eine Diagonalmatrix sein, also $g \in T$ liegen. Daraus folgt $\ker h = T$ und deshalb $W = N/T = \mathfrak{S}_n$. Wir setzen

$$I^N(T) = \{\text{symmetrische Polynome in } X_1, \dots, X_n\} = \mathbb{R}[\sigma_1, \dots, \sigma_n] ,$$

wobei σ_j die j -te symmetrische Elementarfunktion mit $\deg \sigma_j = j$ sei, für die

$$(1 + x_1) \cdots (1 + x_n) = 1 + \sum_{j=1}^n \sigma_j(x_1, \dots, x_n)$$

gilt. Da σ_j im Bild der Abbildung $I(\mathfrak{U}(n)) \longrightarrow I^W(T)$ liegt, erhalten wir damit:

Proposition 192: Die Abbildung $\mathbb{R}[\sigma_1, \dots, \sigma_n] \longrightarrow I(\mathfrak{U}(n))$ mit $\sigma_j \mapsto \sigma_j$ ist ein Algebra-Isomorphismus.

8.8 Berechnung der Euler-Klasse

Sei $E \longrightarrow M$ ein reelles Vektorbündel und $s \in \Gamma(E)$ mit $s(p) = 0$ für $p \in M$ ein glatter Schnitt. Dann erhalten wir eine **intrinsische Ableitung**

$$D_p s : T_p M \longrightarrow E_p \quad \text{mit} \quad D_p s := (\nabla s)_p$$

für jeden Zusammenhang ∇ in E . Um zu sehen, dass der Wert dieses Ausdrucks nicht vom Zusammenhang abhängt, sei $a \in \Omega^1(M, \text{End}(E))$, dann folgt

$$(\nabla + a)s = \nabla s + as \stackrel{\text{bei } p}{=} (\nabla s)_p .$$

Wir nennen p eine **reguläre Nullstelle** wenn $D_p s$ surjektiv ist, außerdem heißt der Schnitt s **regulär**, wenn alle Nullstellen regulär sind, es gilt dann

$$s \pitchfork \text{Nullschnitt} .$$

In diesem Fall ist $s^{-1}(0) \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit.

Nehme nun an, dass M geschlossen (also kompakt und unberandet), orientiert, das Bündel E orientiert und $n = \dim M = \text{Rang } E$ gilt. Ist weiter dann s ein regulärer Schnitt schon E , so ist $s^{-1}(0)$ eine orientierte endliche Menge. Für einen Punkt $p \in s^{-1}(0)$ definieren wir

$$\text{sign}(p) := \begin{cases} +1 & : D_p s : T_p M \xrightarrow{\cong} E_p \text{ ist orientierungserhaltung} \\ -1 & : \text{sonst} \end{cases} .$$

In der Differentialtopologie wird gezeigt, dass es immer einen regulären Schnitt eines solchen Bündels $E \longrightarrow M$ gibt, und dass die **Euler-Zahl**

$$\chi(E, s) = \sum_{p \in s^{-1}(0)} \text{sign}(p)$$

²Etwas, dass mit einer Diagonalmatrix der obigen Form kommutiert (T ist offensichtlich abelsch) und wo alle Einträge verschieden sind, muss selbst diagonal sein, also ist T maximal.

unabhängig von der Wahl des Schnitts s ist. Ein Ergebnis der Morse-Theorie lautet

$$\chi(TM) = \text{Euler-Charakteristik von } M = \sum_{j=0}^n (-1)^j \dim H_j(M; \mathbb{R}) .$$

Lemma 193: *Ist $U \subset M$ eine offene Teilmenge mit $|s| = 1$ über U , ∇ ein orthogonaler Zusammenhang in $E|_U$, sodass $\nabla s = 0$ in U gilt, dann folgt $e(\nabla) = 0$ über U .*

Beweis. Wir können das Bündel über U faserweise in $E = \mathbb{R}s \oplus s^\perp$ zerlegen. Der Zusammenhang ∇ ist dabei bezüglich dieser Aufspaltung verträglich, da $\nabla s = 0$ gilt und ∇ auf $\mathbb{R}s$ damit trivial ist. Auf $E' = s^\perp$ gilt für die Krümmung $F(\nabla) \in \Gamma(\Lambda^2(T^*M) \otimes \Lambda^2 E')$ des Zusammenhangs $F(\nabla)^n = 0$, da wir nicht die komplette „Basis“ für die Volumenform haben, und wegen

$$F(\nabla)^n = e(\nabla) \otimes W$$

folgt dann $e(\nabla) = 0$. □

Dieses Lemma wird uns insofern behilflich sein, dass wir die Berechnungen auf kleine Bälle um die Nullstellen einschränken können.

Lemma 194: *Sei $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung, sodass $L = Ds(0)$ ein Isomorphismus und $s^{-1}(0) = 0$ gilt. Dann ist*

$$s : S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$$

homotop zu L .

Beweis. Definiere eine Homotopieabbildung $F : [0, \infty[\times S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ durch

$$(t, x) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{t}s(tx) & : t > 0 \\ Lx & : t = 0 \end{cases} .$$

Durch die Taylor-Formel wissen wir, dass ein $C > 0$ mit $\|s(y) - Ly\| \leq C\|y\|^2$ für $\|y\| < 1$ existiert, sodass wir für $\|x\| = 1$ dann

$$\left\| \frac{1}{t}s(tx) - Lx \right\| \leq \frac{1}{t}C\|tx\|^2 = tC\|x\|^2 = tC$$

erhalten. Es folgt, dass F stetig ist. □

Lemma 195: *Seien $s_0, s_1 \in \Gamma(E)$ zwei reguläre Schnitte, dann gilt $\chi(E, s_0) = \chi(E, s_1)$.*

Beweis. Siehe Diff. Top. [Beweis-Outline im Skript] □

Definition 196: Wir definieren die **Euler-Zahl** eines Bündels für einen beliebigen regulären Schnitt von $E \rightarrow M$ durch $\chi(E) := \chi(E, s)$.

Lemma 197: *Für N ungerade folgt $\chi(E) = 0$.*

Beweis. Betrachte $\chi(E, -s) = (-1)^N \chi(E, s)$. □

Satz 198: Sei $E \rightarrow M$ ein orientiertes reelles Vektorbündel vom Rang n , M geschlossen, orientiert und ebenfalls vom Rang n . Ist s dann ein regulärer Schnitt, so gilt

$$\int_M e(E) = \sum_{p \in s^{-1}(0)} \text{sign}(p)$$

Für n ungerade ist die Euler-Klasse $e(E) = 0$, also ist zusammen mit dem vorigen Lemma die Aussage für ungerade n erfüllt. Um die allgemeine Aussage zu zeigen, benötigen wir aber noch einige weitere Vorbereitungen.

Es seien V und W zwei endlichdimensionale reelle Räume mit innerem Produkt, $U \subset V$ eine offene Teilmenge und $f : U \rightarrow W$. Wir nennen f **differenzierbar** am Punkt $x \in U$, wenn es eine lineare Abbildung $L : V \rightarrow W$ mit

$$\frac{|f(x+y) - f(x) - Ly|}{|y|} \xrightarrow{y \rightarrow x} 0$$

gibt. Existiert so ein L , dann ist es eindeutig, und wir setzen $Df(x) := L$. Wenn die Abbildung f überall differenzierbar ist, dann erhalten wir auf diese Weise eine Abbildung $Df : U \rightarrow \text{Hom}(V, W)$. Für die zweite Ableitung gilt dann ähnlich

$$D^2 f := D(Df) : U \rightarrow \text{Hom}(V, \text{Hom}(V, W)) \cong \text{Hom}(V \otimes V, W) .$$

Wenn die Abbildung f glatt im üblichen Sinne ist, dann gilt

$$D^2 f(x)(y, z) = \frac{\partial}{\partial s} \bigg|_0 \frac{\partial}{\partial t} \bigg|_0 f(x + sy + tz) ,$$

wobei dieses symmetrisch in y und z ist.

Lemma 199: Sei $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung, sodass $L := Df(0)$ ein orientierungserhaltender Isomorphismus ist. Außerdem sei $f^{-1}(0) = \{0\}$, dann gibt es eine glatte Abbildung $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, sodass

$$h(x) = \begin{cases} x & : \|x\| \leq 1 \\ f(x) & : \|x\| \geq 2 \end{cases}$$

und $h^{-1}(0) = \{0\}$ gilt.

Beweis. Wähle eine glatte Funktion $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass für die Funktion

$$\beta(t) = \begin{cases} 0 & : t \leq 1 \\ 1 & : ??? \end{cases}$$

mit $\beta(t) > 0$ für $t > 1$ gilt. Dann ist $\lambda : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lambda(x) := \beta(|x|)$ glatt. Mit der Taylor-Formel erhalten wir

$$f(x) = Lx + \int_0^1 (1-t) D^2 f(tx)(x, x) dt ,$$

wobei das Integral vektorwertig ist. Definieren dann weiter

$$g(x) = Lx + \lambda(x) \int_0^1 (1-t) D^2 f(t\lambda(x)x)(x, x) dt ,$$

dann ist die eine glatte Abbildung $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $g(x) = Lx$ für $|x| \leq 1$. Für $|x| > 1$ erhält man dann

$$g(x) = Lx + \lambda(x)^{-1} \int_0^1 (1-t) D^2 f(t\lambda(x)x) (\lambda(x)x, \lambda(x)x) dt$$

$$= \lambda(x)^{-1} f(\lambda(x)x) \quad \begin{cases} \neq 0 & : |x| > 1 \\ = f(x) & : |x| \geq 2 \end{cases}$$

Dann können wir eine Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}_m^+(\mathbb{R})$ finden, welche die Eigenschaften

$$\gamma(t) = \begin{cases} ? & : t \leq 1 \\ \mathbb{1} & : t \leq 2 \end{cases}$$

hat. Setze dann $h(x) = \gamma(|x|)g(x)$, dann erfüllt dieses h alle notwendigen Eigenschaften. \square

Lemma 200: Sei $B \rightarrow Z$ ein orientiertes Euklidisches Vektorbündel vom Rang $2n$ mit einem orthogonalen Zusammenhang ∇ , $s \in \Gamma(B)$ ein glatter Schnitt mit $|s| = 1$ und $\nabla s = 0$. Dann gilt $e(\nabla) = 0$ für die Euler-Klasse.

Beweis. Die Krümmung dieses Vektorbündels ist $F(\nabla) \in \Omega^2(M; E') = \Gamma(\Lambda^2(T^*M) \otimes \Lambda^2 E')$ für $E' := s^\perp \subset E$ mit $E = \mathbb{R}s \oplus E'$. Mit dieser Zerlegung gilt

$$e(\nabla) \otimes \omega = F(\nabla)^n = 0$$

und deshalb verschwindet die Euler-Klasse, d.h. $e(\nabla) = 0$. \square

Mit diesen Vorbereitungen können wir nun zum Beweis der Theorem 198 zurückkehren.

Beweis des Satzes. Wir zerlegen diesen umfangreichen Beweis in drei Teile:

1. Sei $\tilde{\tau} = \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ ein Vektorbündel mit der üblichen Euklidischen Metrik. Definiere dann die diagonale Einbettung als Schnitt $\iota \in \Gamma(\tilde{E})$ mit $\iota(x) = (x, x)$. Wähle einen orthogonalen Zusammenhang $\tilde{\nabla}$ in \tilde{E} , sodass

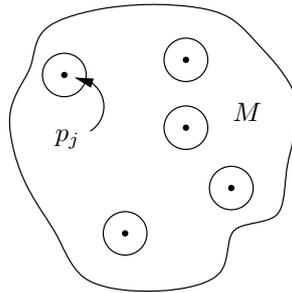
$$\tilde{\nabla} \frac{\iota}{|\iota|} = 0$$

außerhalb der Kugel $B_{1/2}(0)$ gilt. Setze nun

$$a_n = \frac{1}{n!(-2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e(\tilde{\nabla}),$$

dann gilt nach dem vorigen Lemma ebenfalls $e(\tilde{\nabla}) = 0$ außerhalb von $B_{1/2}(0)$. Weiter wähle dann einen regulären Schnitt $s \in \Gamma(E)$ mit $s^{-1}(0) = \{p_1, \dots, p_r\}$ und setze $\varepsilon_j := \text{sign}(p_j)$ für $j = 1, \dots, n$. Außerdem wähle eine Euklidische Metrik auf E und für jedes j ein Tripel (U_j, φ_j, ψ_j) , wobei gilt:

- $U_j \subset M$ ist eine offene Umgebung von p_j ,
- Für alle $j \neq j'$ gilt $U_j \cap U_{j'} = \emptyset$,
- Die Abbildung $\varphi_j : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow U_j$ ist orientierungserhaltend,
- $\psi_j : \tilde{E} \rightarrow \varphi_j^* E$ ist ein Isomorphismus von Euklidischen Vektorbündeln, der genau dann orientierungserhaltend ist, wenn $\varepsilon_j = +1$ gilt.



Wir definieren dann die Umgebungen $U_{j,r} := \varphi_j(B_r(0)) \subset M$. Nach einem früheren Lemma können wir einen Schnitt $\sigma \in \Gamma(E)$ finden, sodass $\sigma^{-1}(0) = s^{-1}(0)$, $\sigma \circ \varphi_j = \psi_j \circ \iota$ in $B_1(0)$ gemäß

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} & \xrightarrow{\psi_j} & E \\ \iota \updownarrow & \circlearrowleft & \updownarrow \sigma \\ \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{\varphi_j} & M \end{array}$$

und $\sigma = s$ außerhalb von $\bigcup_j U_{j,2}$. Wähle nun einen orthogonalen Zusammenhang ∇ in E , sodass $\nabla_{|\sigma|} \sigma = 0$ außerhalb $\bigcup_j U_{j,1/2}$ und $\varphi_j^* \nabla = \tilde{\nabla}$ in $B_{1/2}(0)$ gilt. Dann erhalten wir

$$\int_M e(E) = \frac{1}{n!(-2\pi)^n} \int_M e(\nabla) = \frac{1}{n!(-2\pi)^n} \sum_{j=1}^r \int_{B_j(1/2)} e(\nabla) = a_n \sum_{j=1}^r \text{sign}(p_j)$$

2. Als nächstes müssen wir $a_1 = \frac{1}{-2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e(\tilde{\nabla})$ berechnen. Dazu sei $\tau \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ das tautologische komplexe Linien-Bündel. Wir haben bereits

$$-1 = \int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^1} c_1(\tau) = \int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^1} e(\tau_{\mathbb{R}}) = a_\chi(\tau_{\mathbb{R}})$$

gesehen, wobei wir $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \mathbb{C}^\times$ auffassen. Das tautologische Bündel können wir dann auch als $\tau = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) \times_{\mathbb{C}^\times} \mathbb{C}$ mit der Wirkung $z(u, w) = (z^{-1}u, zw)$ für $z \in \mathbb{C}^\times$ und $u \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ sowie $w \in \mathbb{C}$ auffassen. Wir hatten bereits die Bijektion

$$\Gamma(\tau) \xrightarrow{\text{bij.}} \{f : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} : f(zu) = z^{-1}f(u), u \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, z \in \mathbb{C}^\times\}$$

gezeigt. Betrachte dann mit der Identifikation $u = (z_1, z_2)$ die Funktion

$$f(z_1, z_2) = \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2 + |z_2|^2} \quad \implies \quad f(z, 1) = \frac{\bar{z}}{1 + |z|^2},$$

d.h. der durch f definierte Schnitt $s \in \Gamma(\tau)$ hat genau eine Nullstelle $[0 : 1] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Wir müssen daher nur noch berechnen, ob das ε zu dieser $+1$ oder -1 ist.

Im Allgemeinen gilt: Sind $g, h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(0) = 0$ und $h(0) = 1$ zwei Abbildungen, dann gilt $DG(0) = Dg(0)$ für $G := g \cdot h$. Wähle nun $g(z) = \bar{z}$ und $h(z) = \frac{1}{1+|z|^2}$, dann folgt

$$DG(0)z = \bar{z}$$

und damit $\text{sign}[0 : 1] = -1$, also gilt $\chi(\tau_{\mathbb{R}}) = -1$ und deshalb $a_1 = 1$.

3. Zuletzt folgt die Berechnung der übrigen a_n für $n > 1$. Dazu seien $E_j \rightarrow M_j$ wie oben und $s_j \in \Gamma(E_j)$ mit $j = 1, 2$ reguläre Schnitte. Betrachte dann das Bündel

$$\pi_1^* E_1 \oplus \pi_2^* E_2 \cong E_1 \times E_2 \rightarrow M_1 \times M_2$$

und den Schnitt $s := s_1 \times s_2 \in \Gamma(E_1 \times E_2)$. Die Nullstellen des Schnitts sind $s^{-1}(0) = s_1^{-1}(0) \times s_2^{-1}(0)$. Gilt $s_j(x_j) = 0$ für $j = 1, 2$, so erhalten wir für das Signum dieser Nullstelle im Produktschnitt

$$\text{sign}(x_1, x_2) = \text{sign}(x_1) \text{sign}(x_2) ,$$

also folgt $\chi(E_1 \times E_2) = \chi(E_1)\chi(E_2)$ für die Euler-Charakteristik. Für die Euler-Klasse gilt dagegen

$$\int_{M_1 \times M_2} e(E_1 \times E_2) = \int_{M_1 \times M_2} e(\pi_1^* E_1) \wedge e(\pi_2^* E_2) = \int_{M_1} e(E_1) \cdot \int_{M_2} e(E_2) .$$

Wählen wir dann $M = \mathbb{C}\mathcal{P}^1 \times \dots \times \mathbb{C}\mathcal{P}^1 = (\mathbb{C}\mathcal{P}^1)^n$ und $E = \tau \times \dots \times \tau = (\tau)^n$, so folgt

$$\int_M e(E) = \left(\int_{\mathbb{C}\mathcal{P}^1} e(\tau) \right)^n = \underbrace{(\chi(\tau))}_{-1}^n = \chi(E)$$

und damit $a_n = 1$.

Damit haben wir die Beziehung zwischen der charakteristischen Euler-Cohomologieklassse $e(E)$ und der Euler-Charakteristik $\chi(E)$ bewiesen. \square

9 Riemannsche Geometrie

9.1 Riemannsche Metriken und Zusammenhänge

Definition 201: Eine **Riemannsche Metrik** auf einer glatten Mannigfaltigkeit ist eine Euklidische Metrik auf TM . Wir nennen eine glatte Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Riemannschen Metrik eine **Riemannsche Mannigfaltigkeit**.

Definition 202: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Die Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ heißt **stückweise glatt** wenn eine Zerlegung von $I = [a, b]$ in der Form $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r = b$ existiert, sodass die Einschränkung $\gamma|_{[a_{i+1}, a_i]}$ glatt für jedes i ist. Dann definieren wir die **Länge der Kurve** durch

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \sum_{i=1}^r \int_{a_{i-1}}^{a_i} |\gamma'(t)| dt ,$$

wobei für einen Diffeomorphismus $f : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ die Invarianz $L(\gamma \circ f) = L(\gamma)$ gilt.

Lemma 203: Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stückweise glatte Kurve, wobei \mathbb{R}^n die übliche Riemannsche Metrik hat, dann gilt $L(\gamma) \geq |\gamma(b) - \gamma(a)|$.

Beweis. Wenn γ glatt ist, so gilt $\gamma(b) - \gamma(a) = \int_a^b \gamma'(t) dt$. Dann folgt die Abschätzung

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt = L(\gamma) ,$$

für stückweise glatte Kurven folgt die Aussage entsprechend durch Zerlegen der Kurve. □

Lemma 204: Sei g eine Riemannsche Metrik auf \mathbb{R}^n , dann existiert ein $C > 0$ mit:

1. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ stückweise glatt mit $\gamma(a) = 0$ und $|\gamma(b)| = 1$, so gilt $L_g(\gamma) \geq \frac{1}{C}$.
2. Sei $x \in D^n$ ein Punkt und $\gamma : [0, 1] \rightarrow D^n$ mit $\gamma(t) = tx$ eine glatte Kurve mit $L_g(\gamma) \leq C$.

Beweis. Mit g_x bezeichnen wir das von der Riemannschen Metrik gelieferte innere Produkt auf $T_x \mathbb{R}^n$. Dann definieren wir eine Abbildung

$$f : D^n \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, v) \mapsto |v|_{g_x} ,$$

die stetig ist. Da $D^n \times S^{n-1}$ kompakt ist, existiert dann eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $x \in D^n$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\frac{1}{C} \leq \frac{|v|_{g_x}}{|v|} \leq C$$

gilt. Dies ist äquivalent zu $|v| \leq C|v|_{g_x}$ und $|v|_{g_x} \leq C|v|$. Für die erste Aussage folgt dann unter Verwendung des vorigen Lemmas

$$L_g(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|_g dt \geq \frac{1}{C} \int_a^b |\gamma'(t)| dt \geq \frac{1}{C} (|\gamma(b)| - |\gamma(a)|) = \frac{1}{C} .$$

Für den zweiten Punkt betrachte die Abschätzung

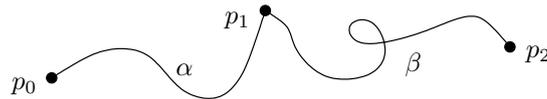
$$L_g(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|_g dt = C \int_0^1 |x| dt \leq C ,$$

dann ist das Lemma bewiesen. □

Proposition 205: Sei M eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit der Topologie \mathcal{T} . Definiere eine Metrik $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$d(p, q) := \inf \{ L(\gamma) : \text{stückweise glatte Kurve } \gamma \text{ von } p \text{ nach } q \} .$$

Dann ist d eine Metrik auf M , und die Topologie \mathcal{T} stimmt mit der Metrik-induzierte Topologie \mathcal{T}_d überein.



Beweis. Zuerst zeigen wir, dass d tatsächlich eine Metrik ist. Die Symmetrie $d(p, q) = d(q, p)$ ist trivial, indem man einfach eine Kurve rückwärts entlang läuft. Um die Dreiecksungleichung nachzuweisen, beachte dass die Hintereinanderschaltung zweier Wege die Länge $L(\alpha\beta) = L(\alpha) + L(\beta)$ hat, dann folgt direkt

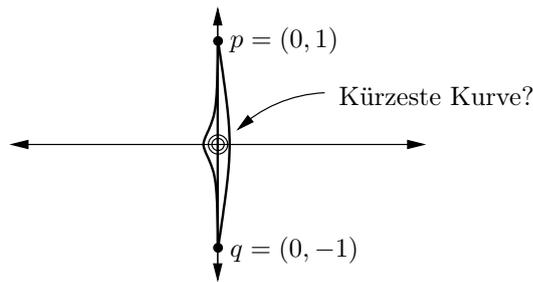
$$d(p_0, p_2) \leq d(p_0, p_1) + d(p_1, p_2) .$$

Sei nun $B_r(p) := \{q \in M : d(p, q) \leq r\}$ ein Ball vom Radius r (bezüglich der Metrik) um p , dieser induziert die kanonische Topologie \mathcal{T}_d eines metrischen Raums. Weiter sei dann $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow M$ eine glatte Einbettung mit $p = \varphi(0)$ und $U := \varphi(D^n)$. Wenden wir das letzte Lemma auf φ^*g an, dann folgt die Existenz eines $r_1 > 0$ mit $B_{r_1}(p) \subset U$.

Also ist $d(p, q) > 0$ für $p \neq q$, also ist d eine Metrik. Damit erhalten wir die strenge Definitheit, also liefert d tatsächlich eine gültige Metrik auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Also liegt $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_d$ und nach dem zweiten Punkt des vorigen Lemmas gibt es ein $r_2 > 0$ mit $U \subset B_{r_2}(p)$, also liegt auch $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}$. □

Betrachten wir nun problematische Situationen, die bei derartigen Metriken auftreten können. Dazu sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p, q \in M$ zwei Punkte. Wir fragen uns nun, ob es immer eine Kurve γ von p und q gibt, sodass $L(\gamma) = d(p, q)$ gilt. Im Allgemeinen ist das nicht der Fall. Betrachten wir beispielsweise $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mit der Euklidischer Metrik, dann kann etwa folgende Situation auftreten:

Aber nehmen wir zunächst einfach einmal an, dass eine solche Kurve existieren würde, dann stellt sich die Frage, welche genaue Form sie hat. Dies führt uns auf ein Variationsproblem und damit auf die Euler-Lagrange-Gleichungen. Wir wollen nun ein entsprechendes Längenminimierendes γ konstruieren.



Im Euklidischen \mathbb{R}^n wissen wir, dass gerade Linien die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten liefern. Wir interpretieren $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ als Bewegung eines Teilchens, und $\gamma' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ als das Geschwindigkeitsfeld. Die Eigenschaft, dass die Geschwindigkeit γ' konstant ist, ist äquivalent dazu, dass die Beschleunigung γ'' verschwindet.

Wir müssen also für eine beliebige Riemannsche Metrik g ein Analogon zu „geraden Linien“ finden. Sei dazu $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ eine glatte Kurve, dann erhalten wir ein kanonisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & TM & \\
 \nearrow \gamma' & \downarrow & \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{\gamma} & M
 \end{array}
 \quad \rightsquigarrow \quad \gamma' \in \Gamma(\gamma^*TM),$$

wobei γ' ein Vektorfeld auf M entlang γ ist. Ist allgemein $X \in \Gamma(\gamma^*TM)$ ein Vektorfeld entlang einer glatten Kurve γ und ∇ ein Zusammenhang in TM , dann hatten wir

$$\nabla_{\gamma'(t)}X = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} h_s X_s$$

definiert, wobei $X : \mathbb{R} \rightarrow TM$ als $s \mapsto X_s$ zu interpretieren ist, $h_s : T_{\gamma(s)}M \rightarrow T_{\gamma(t)}M$ die Holonomie von Γ entlang γ angibt und $\nabla_{\gamma'(t)}X \in T_{\gamma(t)}M$ liegt. Dabei sei an

$$\nabla_{\gamma'(t)}X = \lim_{s \rightarrow t} \frac{h_s X_s - X_t}{s - t}$$

erinnert. Wir suchen also nun nach glatten Kurven γ , wo die (verallgemeinerte) Beschleunigung

$$\nabla_{\gamma'}(\gamma') = 0$$

ist. Wir müssen ∇ passend wählen.

Lemma 206: Sei ∇ ein beliebiger Zusammenhang im Tangentialbündel TM , dann definiere für zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \in \mathfrak{X}(M),$$

dann gilt $T(fX, Y) = T(X, fY) = fT(X, Y)$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Beweis. Mit der Gleichung $[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X$ erhalten wir

$$T(fX, Y) = f\nabla_X Y - ((Yf)X + f\nabla_Y X) - (f[X, Y] - (Yf)X)$$

sofort durch explizites Nachrechnen. □

Definition 207: Wir nennen $T = T_\nabla \in \Omega^2(M; TM)$ die **Torsion** des Zusammenhangs ∇ . Das Lemma zeigt insbesondere, dass $T(X, Y)_p$ nur von den Vektoren X_p und Y_p abhängt. Der Zusammenhang ∇ heißt genau dann **symmetrisch**, wenn $T_\nabla = 0$ ist.

Lemma 208: Seien $E, E' \rightarrow M$ zwei Vektorbündel, dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Homomorphismen } \underbrace{E \rightarrow E'}_{\substack{\text{als Vektorräume} \\ \text{aufgefasst}}}\} & \xlongequal{\quad} & \text{HOM}_{\mathcal{C}^*M}(E, E') \\ & & \cong \downarrow h \\ & & \text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\Gamma E, \Gamma E') \end{array}$$

ein Isomorphismus von $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Moduln.

Beweis. • *h ist injektiv:* Dies ist offensichtlich.

- *h ist surjektiv:* Die Abbildung $\varphi : \Gamma E \rightarrow \Gamma E'$ sei $\mathcal{C}^\infty M$ -linear. Wir werden nun eine Abbildung $\psi : E \rightarrow E'$ konstruieren, sodass $h(\psi)\varphi$ gilt.

Behauptung: Für $x \in M$ und $s \in \Gamma E$ mit $s(x) = 0$ folgt $\varphi(s)(x) = 0$.

Beweis: Wähle Schnitte $s_1, \dots, s_r \in \Gamma E$, sodass $s_1|_U, \dots, s_r|_U$ eine Basis von Schnitten aus $\Gamma(E|_U)$ ist. Wähle weiter eine glatte Funktion $\beta \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $\beta(x) = 1$ und $\text{supp}(\beta) \subset U$ und schreibe

$$\beta s = \sum_{i=1}^r f_i s_i$$

für $f_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $\text{supp}(f_i) \subset U$. Insbesondere gilt dann $s = \beta s + (1 - \beta)s$ und

$$\varphi(s) = \sum_i f_i \varphi(s_i) + (1 - \beta)\varphi(s) ,$$

dann gilt mit $\beta(x) = 1$ und $s(x) = 0$ an dem Punkt $\varphi(s)(x) = 0 + 0 = 0$, also ist $f_i(x) = 0$.

Nun zurück zur Surjektivität von ψ . Um ψ bei $v \in E_x$ zu definieren, wähle einen Schnitt $s \in \Gamma E$ mit $s(x) = v$ und definiere $\psi(v) := \varphi(s)(x)$, dies ist dann nach der vorigen Behauptung wohldefiniert.

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Satz 209: Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann gibt es einen eindeutigen, symmetrischen, orthogonalen Zusammenhang im Tangentialbündel TM , der als **Riemannscher** oder **Levi-Civita-Zusammenhang** bezeichnet wird.

Beweis. • *Eindeutigkeit:* Sei ∇ ein orthogonaler Zusammenhang und $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ drei glatte Vektorfelder. Dann gelten die drei Gleichungen

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \tag{9.1}$$

$$Y\langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \tag{9.2}$$

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle \tag{9.3}$$

von denen wir $(9.1) + (9.2) - (9.3)$ betrachten. Da der Zusammenhang ∇ symmetrisch ist, folgt

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ = \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X \rangle , \end{aligned}$$

wobei wir $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \iff [X, Y] + 2\nabla_Y X = \nabla_X Y + \nabla_Y X$ verwendet haben. Damit definieren wir

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Y X, Z \rangle &= \frac{1}{2} \left(X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle X, [Y, Z] \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle Z, [X, Y] \rangle \right) =: \varphi(X, Y, Z) , \end{aligned} \quad (9.4)$$

sodass insbesondere $\varphi(X, Y, fZ) = f\varphi(X, Y, Z)$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt, denn

$$\begin{aligned} \varphi(X, Y, fZ) - f\varphi(X, Y, Z) &= \frac{1}{2} \left((Xf) \langle Y, Z \rangle + (Yf) \langle Z, X \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle X, (Yf)Z \rangle - \langle Y, (Xf)Z \rangle \right) = 0 . \end{aligned}$$

Als definiert $Z \mapsto \varphi(X, Y, Z)$ nach dem Lemma einen Homomorphismus $TM \rightarrow M \times \mathbb{R}$, also ein Element von T^*M . Sei dann $\nabla_Y X \in \Gamma(TM)$ ein Schnitt mit

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle = \varphi(X, Y, Z) ,$$

wobei $T^*M \cong TM$ unter Verwendung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gilt.

- Wähle nun ein festes X und zeige $\langle \nabla_{fY} X, Z \rangle = f \langle \nabla_Y X, Z \rangle$ über eine ähnliche explizite Rechnung. Dann definiert die Zuordnung $Y \mapsto \nabla_Y X$ einen Homomorphismus $TM \rightarrow TM$, also eine Element von $T^*M \otimes TM$. Nun haben wir also eine Abbildung

$$\Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes TM) \quad X \mapsto \nabla_Y X .$$

- Überprüfe $\langle \nabla_Y(fX) - (Yf)X - f\nabla_Y X, Z \rangle = 0$, dann ist die Leibniz-Regel ergilt. Über eine einfache Rechnung zeigt sich, dass ∇ ein Zusammenhang ist.
- Die Gleichung $\langle \nabla_Y X - \nabla_X Y - [X, Y], Z \rangle = 0$ folgt direkt aus Gleichung (9.4) für φ , da die ersten Terme symmetrisch und antisymmetrisch unter Vertauschung von X und Y sind. Also ist auch der Zusammenhang ∇ symmetrisch.
- Zuletzt folgt dann aus $\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Y Z, X \rangle = Y \langle X, Z \rangle$, dass der Zusammenhang ∇ auch orthogonal ist.

Damit ist das Levi-Civita-Theorem bewiesen. □

Beispiel: Im Euklidischen \mathbb{R}^n ist der kanonische Produkt-Zusammenhang im Tangentialbündel $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sowohl symmetrisch als auch orthogonal, also entspricht er bereits dem Riemannschen Zusammenhang. Die Torsion $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ definiert ein Element $T_\nabla \in \Omega^2(M; TM)$. Um zu zeigen, dass $T = 0$ ist, reicht es zu zeigen, dass $T(\partial_i, \partial_j) = 0$ für $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ gilt, d.h. wir wollen

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j$$

auswerten. Ist $E = M \times \mathbb{R}^n$ und ∇ der kanonische Produkt-Zusammenhang, dann können wir einen Schnitt $s \in \Gamma(E)$ als Funktion $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ interpretieren. ∇s entspricht dann ds unter der Zuordnung, also

$$\Gamma(E) \ni s \mapsto f : M \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \nabla_X s = Xf .$$

Im Fall $E = T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ist $\partial_i \in \Gamma(T\mathbb{R}^n)$, was einer Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ entspricht und $\partial_i(x) = e_i \in \mathbb{R}^n$ ein konstantes Vektorfeld liefert. Sei nun $X_i \in \Gamma(T\mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld, das der Derivation ∂_i entspricht. Dann gilt $X_i(p) = e_i$ nach Definition, und $X_i \in \Gamma(T\mathbb{R}^n)$ entspricht einer Funktion

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad p \mapsto e_i .$$

Es gilt nun $\nabla_Y X_i = Y(e_i) = 0 \iff \nabla \partial_i = 0$, also erhalten wir $\nabla_{\partial_i}(\partial_j) = 0$. Für die Torsion folgt damit

$$T(\partial_i, \partial_j) = \underbrace{\nabla_{\partial_i}(\partial_j)}_0 - \underbrace{\nabla_{\partial_i}(\partial_i)}_0 - [\partial_i, \partial_j] ,$$

und für einen zweifach stetig partiell differenzierbare Funktion f folgt dann

$$[\partial_i, \partial_j]f = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f = 0 ,$$

und damit folgt $T = 0$.

Gewissermaßen entspricht die Krümmung dem Hinternis lokale Koordinaten zu finden, um einen Euklidischen Zusammenhang zu erhalten. In lokalen Koordinaten lässt sich ein Riemannscher Zusammenhang wie folgt darstellen. Sei $M = \mathbb{R}^n$ mit einer Riemannschen Metrik, dann gilt

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i \otimes dx_j ,$$

wobei die Elemente $g_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ der Matrix durch $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle_g$ definiert werden. Ein Zusammenhang ist bestimmt durch seine Eigenschaften auf einer lokalen Schnittbasis, d.h. es gilt

$$\nabla_{\partial_j}(\partial_k) = \sum_i \Gamma_{jk}^i \partial_i ,$$

wobei die $\Gamma_{jk}^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die sogenannten **Christoffel-Symbole** sind.

Um eine einfach anzuwendende Bestimmungsgleichung für diese Christoffel-Symbole zu finden, betrachten wir

$$\langle \nabla_{\partial_j}(\partial_k, \partial_i) \rangle_g = \sum_l \langle \Gamma_{jk}^l \partial_l, \partial_i \rangle_g = \sum_l \Gamma_{jk}^l g_{li} ,$$

dann folgt mit $X = \partial_k, Y = \partial_j$ und $Z = \partial_i$ von der anderen Seite

$$\sum_l \Gamma_{jk}^l g_{li} = \frac{1}{2} (\partial_j g_{ik} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk}) .$$

Nun ist $g = (g_{ij})$ eine positiv definite, symmetrische Matrix, also insbesondere invertierbar. Die (punktweise) inverse Matrix zu (g_{ij}) bezeichnen wir mit (g^{ij}) , und erhalten so die Gleichung

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_l g^{il} (\partial_j g_{ik} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk}) ,$$

ausgedrückt durch die Metrik.

Beispiel: Für $v, w \in \mathbb{R}^n$ wähle ein $g \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ mit $gv = w \iff v = g^{-1}w$, dann gilt komponentenweise

$$v_i = \sum_l g^{il} w_l .$$

9.2 Riemannsche Untermannigfaltigkeiten

Definition 210: Sei (\tilde{M}, \tilde{g}) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine **Riemannsche Untermannigfaltigkeit** von (\tilde{M}, \tilde{g}) ist ein Paar (M, g) , wo M eine glatte Untermannigfaltigkeit $M \subset \tilde{M}$ ist und g die Einschränkung der Metrik \tilde{g} , d.h. es gilt $g_x = \tilde{g}_x|_{T_x M}$ an allen Punkten.

Sei $\tilde{E} \rightarrow Z$ ein Euklidisches Vektorbündel, $E \subset \tilde{E}$ ein Unterbündel und $\tilde{\nabla}$ ein orthogonaler Zusammenhang in \tilde{E} . Dann erhalten wir eine Zerlegung $\tilde{E} = E \oplus E^\perp$ und einen induzierten orthogonalen Zusammenhang ∇ in E durch

$$\nabla s = \pi \tilde{\nabla} s ,$$

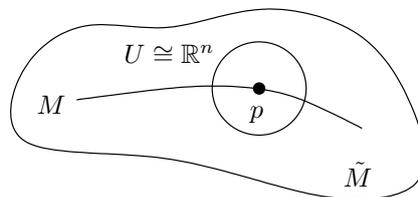
wobei $\pi : \tilde{E} \rightarrow E$ die orthogonale Projektion ist. Weiter können wir dann das Tangentialbündel der übergeordneten Mannigfaltigkeit entlang der Untermannigfaltigkeit in

$$T\tilde{M}|_M = TM \oplus \nu$$

mit ν als Normalenbündel zerlegen. Wir definieren den Zusammenhang in TM dann durch das Pullback

$$\nabla = \pi \iota^* \tilde{\nabla} ,$$

wobei $\tilde{\nabla}$ der Riemannsche Zusammenhang in \tilde{M} und $\iota : M \hookrightarrow \tilde{M}$ die Inklusion mit $\iota^* T\tilde{M} = T\tilde{M}|_M$ ist - wir ziehen also zuerst den Zusammenhang auf M zurück und nehmen dann den orthogonalen Teil. Wir werden nun zeigen, dass das Pullback ∇ der Riemannsche Zusammenhang der Untermannigfaltigkeit M ist.



Um eine explizite Beschreibung dieses Zusammenhangs ∇ zu erhalten, gehen wir wie folgt vor: Für $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $v \in T_p M$ wählen ein Vektorfeld \tilde{X} , dass in einer Umgebung U von p in \tilde{M} definiert ist, sodass $\tilde{X} = X$ auf $M \cap U$ gilt. Dann folgt

$$\nabla_v X = \pi \tilde{\nabla}_v \tilde{X}$$

durch eine korrekte Anwendung der Definition eines Pullback-Zusammenhangs.

Proposition 211: Das oben konstruierte ∇ ist ein Riemannscher Zusammenhang in TM .

Beweis. Nach Konstruktion ist ∇ orthogonal, wie wir bereits wissen, es ist also noch zu zeigen, dass ∇ auch symmetrisch ist. Wähle dazu Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und lokale Fortsetzungen $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(U)$ für eine offene Umgebung $U \subset \tilde{M}$. Dann gilt

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \nabla_{\tilde{Y}} \tilde{X}$$

in U und damit $\pi[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ in $M \cap U$. Es sei nun an folgende allgemeine Aussage erinnert: Sei $f : M \rightarrow \tilde{M}$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$. Falls $f_* \tilde{X}_p = X_{f(p)}$ und $f_* \tilde{Y}_p = Y_{f(p)}$ gilt, dann folgt auch

$$f_* [\tilde{X}, \tilde{Y}]_p = [X, Y]_{f(p)} .$$

In unserem Fall entspricht das f der Inklusion $f \hookrightarrow \tilde{M}$, d.h. für $p \in \tilde{M} \cap U$ gilt dann

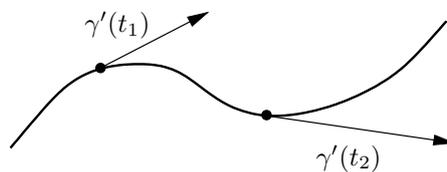
$$[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p = \iota^*[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p = [X, Y]_p \in T_p M ,$$

sodass $\pi[\tilde{X}, \tilde{Y}] = [\tilde{X}, \tilde{Y}] = [X, Y]$ folgt, also ist ∇ symmetrisch. □

9.3 Geodäten

Definition 212: Sei M eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, ∇ der Riemannsche Zusammenhang und $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ heißt **Geodäte**, wenn $\nabla_{\gamma'}(\gamma') = 0$ gilt, d.h. γ' ist parallel entlang γ .

Bemerkung: Insbesondere folgt in dieser Situation, dass $|\gamma'|$ konstant sein muss, da ∇ orthogonal ist.



Sei $P = P_0(TM)$ das Bündel der orthogonalen Rahmen, d.h. die Faser am Punkt $x \in M$ ist

$$P_x = \{ \text{lineare Isometrien } \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M \} .$$

Dann ist P ein Hauptfaser- $O(n)$ -Bündel, und mit A bezeichnen wir den ∇ entsprechenden Zusammenhang in P . Weiter sei für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $B(\xi)$ das horizontale Vektorfeld auf P bezeichnet, sodass

$$\pi_* B(\xi)_u = u\xi \in T_{\pi(u)} M$$

für die Projektion $\pi : P \rightarrow M$ gilt. Wir betrachten also effektiv

$$B(\xi)_u \in A_u \xrightarrow[\cong]{\pi_*} T_{\pi(u)} M \xleftarrow[\cong]{u} \mathbb{R}^n \ni \xi .$$

Lemma 213: Sei $a \in O(n)$ ein Element der orthogonalen Gruppe, mit $r_a : P \rightarrow P$ sei die rechtsseitige Multiplikation mit a bezeichnet. Dann gilt

$$(r_a)_* B(\xi) = B(a^{-1}\xi) .$$

Beweis. Es gilt $\pi_* B(a^{-1}\xi)_{ua} = uaa^{-1}\xi = u\xi = \pi_* B(\xi)_u$, also folgt

$$B(a^{-1}\xi)_{ua} = (r_a)_* B(\xi)_u$$

wegen $(r_a)_* : A_u \xrightarrow[\cong]{} A_u$. □

Proposition 214: Sei $\beta : I \rightarrow P$ eine horizontale Kurve und $\gamma = \pi \circ \beta$ für $\pi : P \rightarrow M$ als Bündelprojektion, dann ist γ eine Geodäte genau dann, wenn β eine Integralkurve des Vektorfelds $B(\xi)$ für ein $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist.

Beweis. Es sei $B(t) : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} T_{\gamma(t)}M$ eine lineare Isometrie, dann definiere damit die Abbildung

$$h : I \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \gamma^*TM \quad (t, \xi) \mapsto B(t)\xi .$$

Da β horizontal ist, bildet h den kanonischen Produktzusammenhang auf den Pullback-Zusammenhang $\gamma^*\nabla$ ab. Um dies zu sehen, definiere einen glatten Schnitt $s(t) = \beta(t)\xi \in \Gamma(\gamma^*TM)$ mit $\xi \in T_{\gamma(t)}M$. Wir müssen dann zeigen, dass aus $\tilde{\nabla} = \gamma^*\nabla$ auch $\tilde{\nabla}s = 0$ folgt. Dazu wähle ein $t_0 \in I$ und eine offene Umgebung U von $p := \gamma(t_0)$, sowie einen glatten Schnitt $\sigma \in \Gamma(P|_U)$, sodass

$$\sigma(p) = \beta(t_0) \quad \text{und} \quad \text{im}(T\sigma_p) = A_{\sigma(p)}$$

gilt, letzteres bedeutet, dass der Schnitt σ horizontal bei p ist. Mit $\beta(t) = \sigma(\gamma(t))a(t)$ für $a : I \rightarrow \mathbb{O}(n)$ mit $a(t_0) = 1$ folgt dann

$$\beta'(t_0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \sigma(\gamma(t)) + \sigma(\gamma(t_0))a'(t_0) = \sigma_*\gamma'(t_0) + \sigma(\gamma(t_0))a'(t_0) ,$$

sodass mit $\pi_*\gamma' = \beta'$ dann $\beta'(t_0) = \sigma_*(\gamma'(t_0))$ folgt, also sind beide Seiten horizontal und es folgt $a'(t_0) = 0$.

Die Abbildung

$$Q = I \times \mathbb{O}(n) \rightarrow \gamma^*P \quad (t, a) \mapsto B(t)a$$

bildet nach der Definition von Pullback-Zusammenhängen analog den Produkt-Zusammenhang nach A ab. Betrachte dann

$$Q \times_{\mathbb{O}(n)} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} (\gamma^*P) \times_{\mathbb{O}(n)} \mathbb{R}^n = \gamma^*(P \times_{\mathbb{O}(n)} \mathbb{R}^n) = \gamma^*(TM) \quad \nabla_0 \mapsto \nabla ,$$

[???

Das Vektorfeld $\gamma' \in \gamma^*TM$ der Kurve entspricht $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, genauer findet sich der Zusammenhang $\gamma'(t) = \beta(t)\rho(t)$, sodass das Geodätendifferential $\nabla_{\gamma'}(\gamma') \in \gamma^*TM$ gerade ρ' entspricht. Also ist γ genau dann eine Geodäte, wenn ρ konstant ist. In jedem Fall gilt

$$\pi_*\beta'(t) = \gamma'(t) = \beta(t)\rho(t) ,$$

und β ist genau dann eine Integralkurve von $B(\xi)$, wenn $\pi_*\beta'(t) = \beta(t)\xi$ gilt. Damit folgt die Aussage. \square

Satz 215: 1. Für jeden Punkt $x \in M$ und Tangentialvektor $v \in T_xM$ existiert ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine Geodäte $\gamma : I \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = v$.

2. Sind $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow M$ zwei Geodäten mit $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ und $\gamma_1'(t_0) = \gamma_2'(t_0)$ für ein beliebiges $t_0 \in I$ dann folgt $\gamma_1 = \gamma_2$.

Beweis. 1. Die Existenz von Geodäten folgt nach dem Beweis der vorigen Proposition direkt aus der Existenz von Integralkurven.

2. Wenn die Kurven β_j horizontale Liftungen von γ_j sind, sodass $\beta_1(t_0) = \beta_2(t_0) = u$ gilt, dann muss β_j eine Integralkurve von $B(\xi_j)$ sein, wobei ξ_j durch

$$\xi_j = u^{-1}\gamma_j(t_0)$$

bestimmt wird, also gilt $\xi_1 = \xi_2$. Also folgt auch $\beta_1 = \beta_2$ gemäß der Eindeutigkeit von Integralkurven, und damit $\gamma_1 = \gamma_2$.

Damit ist die Existenz und Eindeutigkeit von Geodäten gezeigt. \square

Beispiel: Als Anwendung des Formalismus wollen wir die Geodäten im \mathbb{R}^n auf einer Kugelschale bestimmen.

- Wir betrachten $M = \mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Metrik. Der Riemannsche Zusammenhang in $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ist gerade der Produkt-Zusammenhang, wie wir zuvor festgestellt haben. Es folgt nun

$$\nabla_{\gamma'}(\gamma') = \gamma'' ,$$

d.h. eine Kurve γ ist genau dann eine Geodäte, wenn $\gamma(t) = at + b$ für $a, b \in \mathbb{R}^n$. Also erhalten wir das aus der elementaren Geometrie bekannte Ergebnis, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten (im Euklidischen \mathbb{R}^n) eine gerade Linie ist.

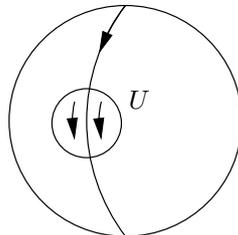
- Betrachten wir nun die Geodäten auf der $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, wobei die S^{n-1} die durch Einschränkung induzierte Metrik des \mathbb{R}^n tragen soll. Seien dann $x, y \in S^{n-1}$ zwei Einheitsvektoren mit $x \perp y$, dann definiere eine Kurve

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow S^{n-1} \quad \gamma(t) = \cos(t)x + \sin(t)y$$

die einen Großkreis auf der S^{n-1} parametrisiert. Insbesondere gilt dann

$$\gamma'(t) = -\sin(t)x + \cos(t)y$$

und $\gamma''(t) = -\gamma$ als Abbildung nach \mathbb{R}^n betrachtet. Sei nun $\tilde{\nabla}$ der Riemannsche Zusammenhang auf \mathbb{R}^n , also der Produkt-Zusammenhang $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ und ∇ der Riemannsche Zusammenhang auf S^{n-1} . Wir müssen dann die Geodätenableitung $\nabla_{\gamma'}(\gamma')$ berechnen.



Für ein beliebiges t_0 können wir ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ finden, sodass in einer Umgebung U von $\gamma(t_0) \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$. Dann folgt

$$\nabla_{\gamma'(t_0)}(\gamma') = \nabla_{\gamma'(t_0)}(X|_{U \cap S^{n-1}})$$

nach Definition eines Pullback-Zusammenhangs. Wir erhalten mit der Projektion auf die erste Komponente $\pi : T\mathbb{R}^n|_{S^{n-1}} = TS^{n-1} \oplus U \longrightarrow TS^{n-1}$ dann

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'(t_0)}(X|_{U \cap S^{n-1}}) &= \tilde{\nabla}_{\gamma'(t_0)}X = \pi \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} X_{\gamma(t)} = \pi \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \gamma'(t) \\ \pi \gamma''(t_0) &= -\pi \gamma(t_0) = 0 \end{aligned}$$

genau dann, wenn γ eine Geodäte ist.

Proposition 216: Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $u : I \longrightarrow J$ eine glatte Abbildung auf offenen Intervallen $I, J \subset \mathbb{R}$ und $\gamma : J \longrightarrow M$ eine nicht-konstante Geodäte. Dann ist $\gamma \circ u$ genau dann eine Geodäte, wenn $u(t) = at + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt.

Beweis. • „ \Rightarrow “: Nach der Kettenregel gilt für die Ableitung dieser Umparametrisierung zunächst

$$\frac{d}{dt}\gamma(u(t)) = u'(t)\gamma'(u(t)) .$$

Da Geodäten allgemein eine konstante Geschwindigkeit haben, kann $\gamma \circ u$ nur dann eine Geodäte sein, wenn $|u'| \neq 0$ konstant ist, folglich muss u linear sein.

• „ \Leftarrow “: Für die Ableitung der Umparametrisierung gilt $u' = a$, also ist $(\gamma \circ u)' = a(\gamma' \circ u)$ parallel zu $\gamma' \circ u$ und damit ist diese Richtung ebenfalls gezeigt. \square

9.4 Die Exponentialabbildung

Definition 217: Für ein beliebiges $v \in TM$ sei c_v die maximale Geodäte in M , die auf einem offenen Intervall mit Null definiert und $c'_v(0) = v$ erfüllt. Es sei weiter $U = \{v \in TM : c_v(1) \text{ ist definiert}\}$, dann gilt

$$\exp : U \longrightarrow M \quad \exp(v) = c_v(1)$$

und U ist offen (da der Definitionsbereich eines maximalen lokalen Flusses zu einem Vektorfeld immer offen ist) und \exp ist glatt (da lokale Flüsse immer glatt sind).

Proposition 218: Wenn M kompakt ist, dann gilt $U = TM$.

Beweis. Das Rahmenbündel $P_0(TM)$ ist ebenfalls kompakt, sodass in diesem Fall alle Vektorfelder $B(\xi)$ komplett sind. \square

Bemerkung: Sei $v \in TM$ und $s \in \mathbb{R}$, dann ist die Umparametrisierung $t \mapsto c_v(st)$ ebenfalls eine Geodäte, allerdings mit

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 c_v(st) = s c'_v(0) = sv ,$$

also folgt $c_{sv}(t) = c_v(st)$. Damit erhalten wir $\exp(sv) = c_{sv}(1) = c_v(s)$ mit $\frac{d}{dt} \exp(tv) = v$.

Definition 219: Für einen beliebigen Punkt $p \in M$ definiere $\exp_p := \exp|_{U \cap T_p M}$, wobei $U \cap T_p M$ eine offene Umgebung der Null sei. Dann gilt $T_0 \exp_p = \text{Id} : T_p M \hookrightarrow$. Nach dem Theorem der inversen Funktion bildet somit \exp_p einen kleinen offenen Ball $B_\varepsilon(0) \subset T_p M$ diffeomorph auf eine offene Menge in M an. Daher wird $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ als **Geodäten-Ball** bezeichnet.

Proposition 220: Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $Z \subset M$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit mit $\partial Z = \emptyset$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$f_\varepsilon : \exp|_{D_\varepsilon(\nu)} : D_\varepsilon(\nu) \longrightarrow M$$

ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge ist. Man beachte dabei die Zerlegung des Tangentialraum $TM|_Z = TZ \oplus \nu$ und $D_\varepsilon(\nu) := \{w \in \nu : |w| < \varepsilon\}$.

Beweis. Für einen Punkt $p \in Z$ ist $T(f_\varepsilon)_{(p,0)}$ ein Isomorphismus nach der vorigen Proposition. Nach dem Theorem der inversen Funktion und der Kompaktheit von Z existiert dann ein $\varepsilon > 0$, sodass f_ε wohldefiniert und ein lokaler Diffeomorphismus ist. Nehmen wir an, dass wir Punkte $p_n, q_n \in Z$ gewählt haben und

$$v_n \in \nu_{p_n} \quad \text{mit} \quad |v_n| \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad w_n \in \nu_{q_n} \quad \text{mit} \quad |w_n| \rightarrow 0 .$$

Nach Auswahl von Teilfolgen können wir dann $p_n \rightarrow p \in Z$ und $q_n \rightarrow q \in Z$ annehmen, und nach der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp_{p_n}(v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp_{q_n}(w_n) = q .$$

Also gilt $v_n = w_n$ und $p_n = q_n$ für n hinreichend groß, da f_ε ein lokaler Diffeomorphismus für ε klein ist. Also ist f_ε injektiv für hinreichend kleines ε . \square

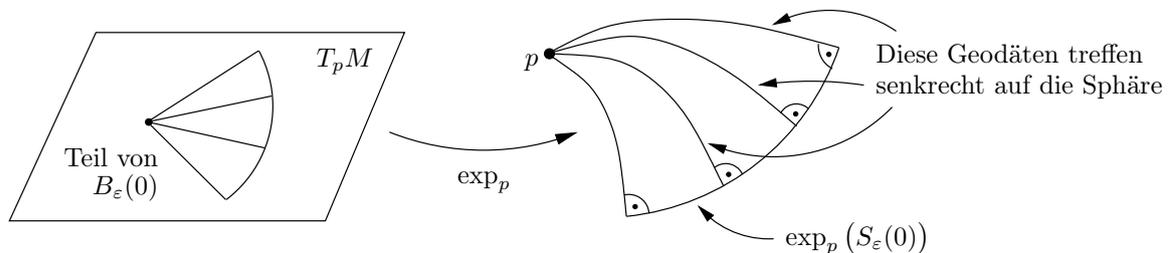
9.5 Längen-minimierende Eigenschaften von Geodäten

Geodäten haben in der Differentialgeometrie eine hohe Bedeutung. Wir werden nun die folgenden Eigenschaften beweisen:

- Jede Geodäte ist minimiert lokal die Länge.
- Jede längen-minimierende Kurve, die durch die Bogenlänge parametrisiert ist, entspricht einer Geodäte.
- *Hopf-Rinow*: Auf einer vollständigen (als metrischer Raum) Riemannschen Mannigfaltigkeit können zwei Punkte immer durch eine Längen-minimierende Geodäte verbunden werden.

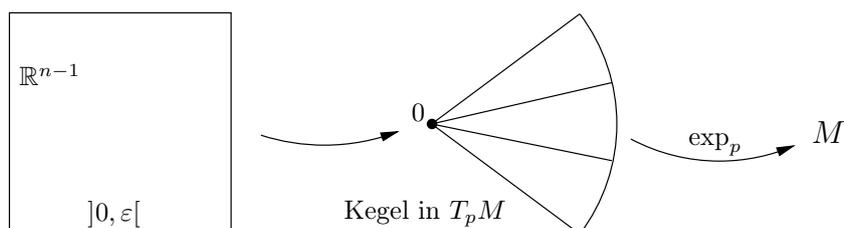
Satz 221 (Gauss-Lemma): Sei (M, g) ein Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$ ein Punkt. Seien $v, w \in T_p M$ zwei Tangentialvektoren mit $v \perp w$ und $\exp_p(v)$ definiert. Dann gilt

$$\langle T(\exp_p)_v(v), T(\exp_p)_v(w) \rangle = 0 .$$



Beweis. Sei $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow S(T_p M)$ eine glatte Einbettung in die Einheitssphäre im $T_p M$, dann definiere

$$h :]0, \varepsilon[\times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow M \quad (t, x) \mapsto \exp_p(t\varphi(x)) .$$



Seien weiter $X = \frac{\partial}{\partial t}$ und $Y = \frac{\partial}{\partial x_j}$ Vektorfelder auf $]0, \varepsilon[\times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Da h ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge ist, können wir die Metrik gemäß $\tilde{g} = h^*g$ zurückziehen, dann ist der Riemannsche Zusammenhang ∇ auf $]0, \varepsilon[\times \mathbb{R}^{n-1}$ definiert durch \tilde{g} . Insbesondere gilt dann $\nabla_X X = 0$, da $t \mapsto (t, x)$ eine Geodäte ist. Es folgt

$$X\langle X, Y \rangle_{\tilde{g}} = \underbrace{\langle \nabla_X X, Y \rangle}_0 + \langle X, \underbrace{\nabla_X Y}_{\nabla_Y X} \rangle = \langle X, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2} Y\langle X, X \rangle = 0$$

da $|X|_{\tilde{g}} = 1$ gilt. Dann ist $\langle X_{(t,x)}, Y_{(t,x)} \rangle$ konstant in t . Wir setzen $D_0 h := \frac{\partial h}{\partial t}$ und $D_j h := \frac{\partial h}{\partial x_j}$, dann gilt

$$D_0 h(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\exp_p} (s\varphi(x)) = T(\exp_p)_{t\varphi(x)}(\varphi(x)) \xrightarrow{t \rightarrow 0} T(\exp_p)_0(\varphi(x)) = \varphi(x) \quad \text{und}$$

$$D_j h(t, x) = tT(\exp_p)_{t\varphi(x)} D_j \varphi(x) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

und es folgt $0 = \lim_{h \rightarrow 0} \langle D_0 h(t, x), D_j h(t, x) \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \langle X_{(t,x)}, Y_{(t,x)} \rangle$ weil h eine Isometrie ist, und damit folgt $\langle X, Y \rangle_{\tilde{g}} = 0$. \square

Definition 222: Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Wenn $\exp_p = \exp|_{T_p M}$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung der $0 \in T_p M$ ist, dann heißt $\exp_p(V) \subset M$ **normale Umgebung** von p .

Als nächstes zeigen wir nun, dass Geodäten tatsächlich längen-minimierend sind.

Proposition 223: Sei $B = \exp_p(B_\varepsilon(0))$ ein Geodäten-Ball, $c : [0, 1] \rightarrow B$ ein Stück einer Geodäte mit $c(0) = p$ und $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine stückweise differenzierbare Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = c(1)$. Dann gilt

$$L(\gamma) \geq L(c) ,$$

und wenn die Gleichheit gilt, dann existiert eine stückweise differenzierbare Funktion $\rho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\rho' \geq 0$ und $\gamma = c \circ \rho$.

Beweis. Nehmen wir zuerst an, dass das Bild der Kurve $\text{im}(\gamma) \subset B$ liegt. Wir können annehmen, dass $\gamma(t) \neq p$ für alle $t > 0$ gilt. Für $0 < t \leq 1$ können wir dann

$$\gamma(t) = \exp_p(r(t)v(t))$$

mit $r(t) > 0$ und $|v(t)| = 1$. Dann gilt $\frac{d}{dt} r(t)v(t) = r'(t)v(t) + r(t)v'(t)$ und es folgt

$$0 = \frac{d}{dt} |v|^2 = 2\langle v, v' \rangle \quad \implies \quad v \perp v' .$$

Definiere dann die Abbildung $L(t) := T_{r(t)v(t)} \exp_p : T_p M \rightarrow T_{\gamma(t)} M$, dann folgt nach dem Gauss-Lemma $Lv \perp Lv'$. Es folgt

$$\gamma'(t) = L(t) \frac{d}{dt} r(t)v(t) = r'(t)L(t)v(t) + r(t)L(t)v'(t)$$

und damit $|\gamma'|^2 = |r'|^2 |Lv|^2 + r^2 |Lv'|^2 = |r'|^2 + r^2 |Lv'|^2 \geq (r')^2$. Für $0 < a \leq 1$ erhalten wir damit die Abschätzung

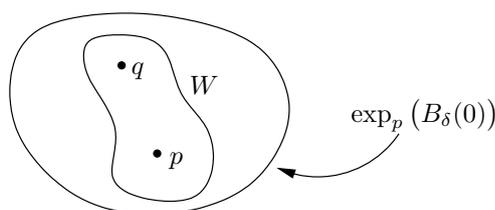
$$\int_a^1 |\gamma'| \geq \int_a^1 |r'| \geq \int_a^1 r' = r(1) - r(a) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \int_0^1 |\gamma'| = L(\gamma) \geq r(a) = L(c) .$$

Wenn $L(\gamma) = L(c)$ gilt, dann muss $r^2|Lv'|^2 = 0$ sein, also $Lv' = 0 \iff v' = 0$. Somit ist v stetig und auf jedem Teilintervall konstant, wo es differenzierbar ist, also insgesamt konstant.

Für $L(\gamma) = L(c)$ müssen wir dann $r' \geq 0$ haben. Mit $\gamma(t) = \exp_p(r(t)v)$ nehmen wir dann $\rho = L(c)r$. Liegt $\text{im}(\gamma) \not\subset B$, dann folgt aus dem vorigen Argument $L(\gamma) \geq \varepsilon > L(c)$. \square

Proposition 224: Für jedes $p \in M$ existiert eine Umgebung W und ein $\delta > 0$, sodass für jeden Punkt $q \in W$ die Exponentialabbildung \exp_q ein Diffeomorphismus auf $B_\delta(0) \subset T_qM$ ist und $W \subset \exp_q(B_\delta(0))$ liegt.

Bemerkung: Solch ein W wird **total normale Umgebung** von p genannt.



Beweis. Wir können von $M = (\mathbb{R}^n, g)$ und $p = 0$ ausgehen, außerdem sei $U \subset T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ das Definitionsgebiet der Exponentialfunktion. Die Abbildung $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ mit $(x, v) \mapsto (x, \exp_x(v))$ hat die Ableitung

$$DF(x, 0) = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ \text{Id} & \text{Id} \end{pmatrix},$$

und ist damit umkehrbar. Nun wenden wir den Satz von der inversen Funktion an, dann existiert ein $\delta > 0$ und eine Umgebung V von $0 \in \mathbb{R}^n$, und F bildet $V \times B_\delta(0)$ diffeomorph auf eine Umgebung W' von $(0, 0)$ ab. Wähle dann eine offene Umgebung W von $0 \in \mathbb{R}^n$, sodass $W \times W \subset W'$ liegt. In diesem Fall liegt dann $W \subset \exp_x(B_\delta(0))$ für jedes $x \in W$ gemäß der Definition der Abbildung F . \square

Proposition 225: Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine stückweise differenzierbare Kurve und $L(\gamma) = d(\gamma(b), \gamma(a))$. Wenn $|\gamma'|$ dann konstant ist, so ist γ eine Geodäte.

Beweis. Sei $a \leq t \leq b$ und W eine total normale Umgebung von $\gamma(t)$. Dann existieren $a' \neq b'$ mit $a \leq a' \leq t \leq b' \leq b$ und $\gamma([a', b']) \subset W$ [...?]. Dann ist $\gamma(b')$ im Geodäten-Ball um $\gamma(a')$, also ist $\gamma|_{[a', b']}$ eine Geodäte. Dies gilt für alle Wahlen von a' und b' . \square

Satz 226 (Hopf-Rinow): Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Wenn die Exponentialfunktion \exp_p auf ganz T_pM definiert ist, dann findet sich für jedes $q \in M$ eine Längen-minimierende Geodäte von p nach q .

Beweis. Sei $r = d(p, q)$ der Abstand der beiden Punkte und $B_\delta(p) = \exp_p(B_\delta(0))$ ein normaler Ball mit dem Rand $S := \partial B_\delta(p)$. Wähle dann einen Randpunkt $x \in S$, sodass

$$d(x, q) = d(S, q)$$

gilt, dann kann $x = \exp_p(\delta v)$ für ein passendes $v \in T_pM$ mit $|v| = 1$ dargestellt werden. Definiere als Kurve $\gamma(s) := \exp_p(sv)$, dann werden wir $\gamma(r) = q$ zeigen.

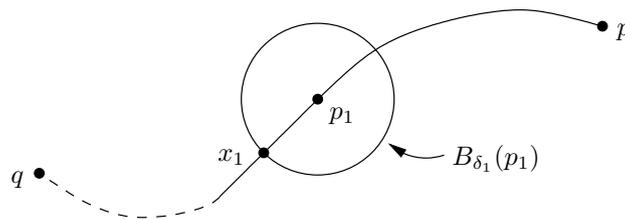
Definiere dann $A := \{s \in [0, r] : d(\gamma(s), q) = r - s\}$, dann müssen wir zeigen, dass $r \in A$ liegt. Zunächst einmal ist A abgeschlossen, da $s \mapsto d(\gamma(s), q) + s$ stetig ist. Wir erhalten weiter die Abschätzung

$$r = d(p, q) \leq d(p, \gamma(s)) + d(\gamma(s), q) \leq s + d(\gamma(s), q) \iff d(\gamma(s), q) \geq r - s ,$$

für $0 \leq s \leq \delta$ gilt dann weiter

$$d(\gamma(s), q) \leq d(\gamma(s), x) + d(x, q) = (\delta - s) + (r - \delta) = r - s .$$

Also gilt $d(\gamma(s), q) = r - s$ für $0 \leq s \leq \delta$ genau dann, wenn $[0, \delta] \subset A$.



Sei nun $s_1 := \sup(A) = \max(A)$ und nehme $s_1 < r$ an, weiter definiere $p_1 := \gamma(s_1)$. Durch Wiederholung des vorigen Arguments erhalten wir einen Widerspruch, da $s_1 + d_1 \in A$ liegen würde, und damit s_1 nicht das Maximum von A wäre. Also gilt $\max(A) = r$, und wir erhalten $d(\gamma(r), q) = r - r = 0$ und damit $\gamma(r) = q$. \square

Der Satz von Hopf-Rinow kann auch anders formuliert werden:

Satz 227 (Hopf-Rinow): Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

1. Die Exponentialfunktion \exp_p ist auf ganz T_pM definiert.
2. Die Mannigfaltigkeit ist komplett als metrischer Raum.
3. Die Exponentialfunktion \exp ist auf ganz TM definiert.

Beweis. Übung. \square

9.6 Riemannsche Krümmung

Sei M eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ der Riemannsche Zusammenhang. Wir definieren dann

$$R = -F(\nabla) \in \Omega^2(M; \mathfrak{so}(TM)) ,$$

und für zwei Vektoren $X, Y \in T_pM$ ist dann $R(X, Y) : T_pM \rightarrow T_pM$ schiefssymmetrisch und für ein weiteres $Z \in T_pM$ gilt

$$-R(X, Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})Z . \tag{9.5}$$

Proposition 228: Für die Riemannsche Krümmung R gelten die folgenden beiden Eigenschaften:

1. Erste Bianchi-Identität: $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$

2. Es gilt $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$

Beweis. 1. Dies folgt aus Gleichung (9.5) und der Symmetrie des Riemannschen Zusammenhangs.

2. Dies folgt direkt aus der Bianchi-Identität.

Damit sind die beiden Eigenschaften auch schon bewiesen. □

Sei nun V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, dann gibt es einen Isomorphismus

$$\begin{array}{c} \{\text{orientierte } k\text{-dimensionale Unterräume } W \subset V\} \\ \cong \downarrow \psi \\ \Lambda^k V / \mathbb{R}_+ \end{array}$$

Ist dann w_1, \dots, w_k eine positive Basis für W , dann definiere $\psi(W) = w_1 \wedge \dots \wedge w_k$. Nun wähle ein inneres Produkt auf V , dann erhalten wir auch ein inneres Produkt auf $\Lambda^k V$ durch

$$\begin{aligned} (V \times \dots \times V) \times (V \times \dots \times V) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((v_1, \dots, v_k), (w_1, \dots, w_k)) &\mapsto \det(\langle v_i, w_j \rangle_{i,j=1,\dots,k}), \end{aligned}$$

welches sowohl in den v_i als auch den w_j alternierend ist, und so eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda^k V \times \Lambda^k V \longrightarrow \mathbb{R}$$

induziert. Sei dann e_1, \dots, e_k eine orthonormale Basis des Vektorraums V , dann erhalten wir eine orthonormale Basis für $\Lambda^k V$ durch die Menge $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$. Es sei dann erinnert an die Abbildung

$$\text{so}(V) \xrightarrow{\cong} (\Lambda^2 V)^* = \Lambda^2 V \quad S \mapsto (x \wedge y \mapsto \langle Sx, y \rangle).$$

9.6.1 Krümmungs-Transformationen

Für einen Punkt $p \in M$ induziert jetzt die Anwendung der vorigen Abhandlung über Vektorräume auf Tangentialräume eine sogenannte Krümmungs-Transformation gemäß

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^2(T_p M) & \xrightarrow{R_p} & \text{so}(T_p M) = \Lambda^2(T_p M) \\ & \searrow & \nearrow \\ & \text{Krümmungs-Transformation } R_p & \end{array}$$

Außerdem ist die Krümmungs-Transformation R_p symmetrisch, denn es gilt

$$\langle R_p(v \wedge w), v' \wedge w' \rangle = \langle R_p(v, w)v', w' \rangle$$

und letzteres ist symmetrisch in (v, w) und (v', w') . Bezüglich einer geeigneten Basis von $\Lambda^2(T_p M)$ ist dies also eine Diagonalmatrix.

9.6.2 Bereichsweise Krümmung

Sei $\sigma \subseteq T_p M$ ein beliebiger 2-dimensionaler Unterraum, dann definieren wir

$$K(v, w) := K(\sigma) := \frac{\langle R_p(v, w)v, w \rangle}{|v \wedge w|^2} = \frac{\langle R_p(v \wedge w), v \wedge w \rangle}{|v \wedge w|^2},$$

wobei v und w eine beliebige Basis von σ sei (bei einem Wechsel der Basis kürzen sich auf der rechten Seite der Gleichung die Skalare heraus). Einige Tatsachen, auf die wir aber nicht mehr eingehen können, sind:

- Es gilt eine Formel für R_p ausgedrückt durch $K(\sigma)$.
- Gilt $\tilde{g} = r^2 g$, dann folgt $\tilde{K}(\sigma) = \frac{1}{r^2} K(\sigma)$.

Sei V nun noch einmal ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, dann liegt entsprechend

$$\sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i \in V \otimes V,$$

wobei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine orthonormale Basis für V und die Summe für alle orthonormalen Basen von V gleich ist. Zum Beweis füge man einfach eine orthogonale Matrix ein.

9.6.3 Ricci-Krümmung

Sei $v \in T_p M$ ein Tangentialvektor über $p \in M$, dann betrachten wir die Abbildung

$$T_p M \otimes T_p M \longrightarrow \mathbb{R} \quad w_1 \otimes w_2 \mapsto R(w_1, v)w_2.$$

Wir werden diese Abbildung nun auf dem ausgezeichneten Element (9.5) aus, wobei wir

$$\text{Ric}_p(v) := \sum_{i=1}^n R(e_i, v)e_i$$

für eine orthonormalbasis e_i des Tangentialraums $T_p M$ definieren. $\text{Ric}_p : T_p M \longrightarrow T_p M$ ist dann eine sogenannte **Ricci-Transformation**, für die

$$\text{Ric}_p(v, w) = \langle \text{Ric}_p(v), w \rangle = \sum_i \langle R(e_i, v)e_i, w \rangle \in \mathbb{R}$$

gilt, und die symmetrisch in v und w ist. Außerdem erhalten wir die Darstellung

$$\text{Ric}_p(e_j, e_j) = \sum_i \langle R(e_i, e_j)e_i, e_j \rangle = \sum_{j \neq i=1}^n K(e_i, e_j).$$

9.6.4 Skalare Krümmung

Wir definieren weiter eine skalare Krümmung $\text{Scal} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ durch die Ricci-Transformation $\text{Ric}_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei gilt

$$\text{Scal}(p) = \sum_{i=1}^n \text{Ric}_p(e_i, e_i) = \sum_{i \neq j} K(e_i, e_j) = 2 \sum_{i < j} K(e_i, e_j).$$

Beispiel: 1. Die Krümmung des euklidischen \mathbb{R}^n ist $K = 0$.

2. Auf $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\}$ gilt $K = 1$.

3. Betrachte $H^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : -x_0^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 = -1, x_0 > 0\}$ und definiere für $v, w \in T_p H^n$

$$\langle v, w \rangle := -v_0 w_0 + \sum_{i=1}^n v_i w_i$$

als ein inneres Produkt. Dann ist H^n eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit der Krümmung $K = -1$.

Satz 229: Sei M eine n -dimensionale vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann gelten die folgenden drei Aussagen:

1. Für $K = 0$ gilt $M = \mathbb{R}^n/\Gamma$, wobei Γ die diskrete Gruppe der Isometrien ist. Anders ausgedrückt ist der universelle Überdeckungs-Raum von M isometrisch zu \mathbb{R}^n .
2. Bei $K = 1$ gilt $M = S^n/\Gamma$
3. Bei $K = -1$ gilt $M = H^n/\Gamma$.

Beispiel: Sei G eine Lie-Gruppe mit einer bi-invarianten Riemannsche Metrik g , d.h. es gilt $r_a^* g = g = \ell_a^* g$ für alle $a \in G$. Jede kompakte Lie-Gruppe G besitzt solch eine Metrik. Sind dann weiter X und Y zwei links-invariante orthonormale Vektorfelder auf G , dann gilt

$$K(X, Y) = \frac{1}{4} |[X, Y]|^2 \geq 0,$$

also gilt $\text{Scal} > 0$ wenn G nicht-abelsch und zusammenhängend ist.

9.7 Das Gauss-Bonnet-Theorem

Satz 230: Sei M eine geschlossene, orientierte, 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann ist $K = \frac{1}{2} \text{Scal} : M \rightarrow \mathbb{R}$ die **Gauß-Krümmung**. Ist g das Geschlecht der Mannigfaltigkeit M , dann gilt

$$2 - 2g = \frac{1}{2\pi} \int_M K.$$

Beweis. Es ist $F(\nabla) \in \Omega^2(M; \text{so}(TM)) = \Gamma(\Lambda^2(T^*M) \otimes \Lambda^2 TM)$ die Krümmung des Zusammenhangs ∇ . Mit der Volumenform ω gilt die Zerlegung $F(\nabla) = e(\nabla) \otimes \omega$, wobei $e(\nabla), \omega \in \Omega^2$ liegt. Betrachte dann

$$e(\nabla)(e_1, e_2) = \langle F(\nabla)(e_1, e_2)e_1, e_2 \rangle = -\langle R(e_1, e_2)e_1, e_2 \rangle = -K(e_1, e_2),$$

so folgt $e(\nabla) = -K\omega$. Mit der Definition der Euler-Klasse einer Mannigfaltigkeit $e(TM) = -\frac{1}{2\pi}[e(\nabla)] = \frac{1}{2\pi}[K\omega]$, und erhalten so

$$2 - 2g(M) = \chi(M) = \chi(TM) = \int_M e(TM) = \frac{1}{2\pi} \int_M K.$$

Also ist die Beziehung zwischen Gauss-Krümmung einer Fläche und dem Genus bewiesen. \square

Satz 231 (Vereinheitlichung): Sei M eine 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit dem Geschlecht $g(M) > 0$. Für jede Riemannsche Metrik g auf M existiert dann ein $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $e^{2\rho}g$ eine konstante bereichsweise Krümmung -1 hat.

Satz 232 (Hadamard): Sei M eine vollständige, einfach zusammenhängende, n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, sodass für alle $p \in M$ und Unterräume $\sigma \subset T_pM$ mit $\dim(\sigma) = 2$ die Krümmung $K(\sigma) \leq 0$ haben. Dann ist

$$\exp_p : T_pM \rightarrow M$$

ein Diffeomorphismus für alle $p \in M$. Insbesondere gilt $M \approx \mathbb{R}^n$.

Satz 233 (Bonnet-Myers): Sei M eine vollständige, n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $r > 0$, sodass

$$\operatorname{Ric}_p(v, v) \geq \frac{n-1}{r^2}|v|^2$$

für alle $p \in M$ und $v \in T_pM$ gilt. Dann ist M kompakt und es gilt $\operatorname{diam} M \leq \pi r$, außerdem ist $\pi_1(M)$ endlich.

Literaturverzeichnis

- [KN63] KOBAYASHI, Shoshichi ; NOMIZU, Katsumi: *Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics*. Bd. 1: *Foundations of Differential Geometry*. New York London : John Wiley & Sons, 1963
- [Lan95] LANG, Serge: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 160: *Differential and Riemannian Manifolds*. 3rd. Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag, 1995
- [MS74] MILNOR, John W. ; STASHEFF, James D.: *Annals of Mathematical Studies*. Bd. 76: *Characteristic Classes*. Princeton New Jersey : Princeton University Press, 1974
- [Sav99] SAVELIEV, Nikolai: *Lectures on the Topology of 3-Manifolds*. Berlin : Walter de Gruyter, 1999

Index

- G -Raum, 24
 - freier, 24
- ε -Derivation, 33
- k -Form, 35
- äquivariant, 24
- äußere Ableitung, 36
- äußere Algebra, 33
 - Dach-Produkt, 32
 - Multiplikation, 33
- äußeres Produkt, 32

- Ableitung
 - entlang einer Kurve, 70
 - kovariante, 45
- abstrakte Untergruppe, 27
- Adjugation, 22
 - in der Lie-Algebra, 22
- adjungierte Darstellung, 22
- affiner Zusammenhang, 48
- Algebra
 - äußere, 33
 - der glatten Funktionenkeime, 6
 - der stetigen Funktionenkeime, 7
 - glatte Differentialformen, 35
 - graduierte, 33
- alternierend, 32
 - äußere Algebra, 33
 - Raum der alternierenden k -Formen, 32
- Anti-Homomorphismus, 24

- Bündel der orthonormalen Rahmen, 90
- Basis von Schnitten, 54
- Bianchi-Identität, 57
- Bonnet-Myers, 126

- Casson-Invariante, 84
- charakteristische Klassen
 - Chern-Klassen, 86
 - Euler-Klasse, 94
 - Pontrjagin-Klassen, 88
- Chern-Klassen, 86
 - erste, 60
 - totale, 87
- Christoffel-Symbol, 113

- Dach-Produkt, 32
 - verallgemeinertes, 54
- Derivation, 6, 33
 - ε -Derivation, 33
 - 0-Derivation, 33
 - 1-Derivation, 33
 - glatte, 14
 - Schief-Derivation, 33
- Diffeomorphismus, 5
 - Gruppe aller Diffeomorphismen, 6
 - lokaler, 5
- Differentialform, 35
 - Algebra der glatten Differentialformen, 35
 - Lie-Ableitung, 36
 - Zusammenhangs-Form, 47
- Distribution, 40
 - horizontale, 40
 - involutive, 40
 - Krümmung, 44
 - Zusammenhang, 45

- echt unstetig, 6
- eigentlich, 25
- Eindeutigkeit von Integralkurven, 15
- Euklidische Metrik, 89
- Euler-Klasse, 94
- Euler-Zahl, 102, 103
- Existenz von Integralkurven, 15
- Exponentialabbildung, 21

- Faserbündel
 - Hauptfaserbündel, 24
 - Prinzipalbündel, 24
 - Rahmenbündel, 31
 - Schnitt entlang einer Kurve, 70
 - Tangentialbündel, 12
 - Unterbündel, 40
 - Vektorbündel
 - komplexes, 30
 - reelles, 30
 - zugeordnetes, 29
- flacher Zusammenhang, 51
- Fluss, 15
 - globaler, 15
- freie Wirkung, 24
- freier G -Raum, 24
- Frobenius, 41, 74
- Funktionenkeime
 - glatte, 6
 - stetige, 7

- Gauß-Krümmung, 125
- Gauss-Lemma, 119
- Geodäte, 115
- Geodäten-Ball, 118
- glatte Abbildung, 5
 - Lie-Ableitung, 36
- glatte Funktionenkeime, 6
 - Derivationen, 6
- glatte Mannigfaltigkeit, 4
- glatte Wirkung, 23
- glatter Atlas, 3
 - maximal, 3
- glatter Schnitt, 12
 - Basis von Schnitten, 54
 - regulärer, 102
- glattes Vektorfeld, 12
- globaler Fluss, 15
- graduierte Algebra, 33
 - graduierter Rang, 33
- Gruppe aller Diffeomorphismen, 6

- Hadamard, 126

- Haupt- G -Raum, 25
Hauptfaserbündel, 24
Holonomie-Isomorphismus
 für glatte Kurven und Hauptfaserbündel, 69
 für glatte Kurven und Vektorbündel, 70
 für stetige Kurven und Hauptfaserbündel, 74
homogener Raum, 27
Hopf-Faserung, 28
Hopf-Rinow, 121, 122
horizontale Distribution, 40
 Zusammenhang, 45
horizontaler Lift, 41
- Immersion, 10
induziertes Vektorfeld, 16
Integralkurve, 14
intrinsische Ableitung, 102
Inverse Funktion, 8
involutiv, 40
Isotropie-Gruppe, 27
- kanonische positive Orientierung, 100
kanonischer Produkt-Zusammenhang, 48
kartesisches Produkt, 5
Kommutator, 13
komplettes Vektorfeld, 15
komplexes Linien-Bündel, 59
komplexes Vektorbündel, 30
Kontakt-Struktur, 43
kovariante Ableitung, 45
Krümmung, 51
 lokale Komponentendarstellung, 59
Krümmung der Distribution, 44
- Levi-Civita-Zusammenhang, 111
Lie-Ableitung, 17, 36
Lie-Algebra, 14, 20
 Adjugation, 22
Lie-Gruppe, 20
 abstrakte Untergruppe, 27
 adjungierte Darstellung, 22
 Exponential-Abbildung, 21
 Lie-Algebra, 20
 zusammenhängend, 23
Lie-Klammer, 13
Lift
 horizontaler, 41
Linien-Bündel
 komplexes, 59
 tautologisches, 61
links-invariant, 20
lokal trivialer Zusammenhang, 51
lokale Trivialisierung, 24
- Mannigfaltigkeit
 Diffeomorphismus, 5
 lokaler, 5
 Distribution, 40
 glatte, 4
 glatte Abbildung, 5
 kartesisches Produkt, 5
 Quotientenraum, 5
 Tangentialabbildung, 7
 Tangentialbündel, 12
 Tangentialraum, 6
 topologische, 3
 Untermannigfaltigkeit, 4
 Wirkung einer Lie-Gruppe, 23
- maximaler glatter Atlas, 3
maximaler lokaler Fluss, 15
Metrik
 Euklidische, 89
- Natürlichkeit, 87
normale Umgebung, 120
normale Untergruppe, 27
Normalteiler, 27
- Orientierung
 kanonische positive, 100
Orientierung eines Bündels, 91
orthogonaler Zusammenhang, 89
- Parallelverschiebung, 45
Pontrjagin-Klassen, 88
Prinzipalbündel, 24
Produkt-Formel, 87
Produkt-Klammer, 13
Produkt-Zusammenhang, 48
Produktregel
 verallgemeinerte, 46
- Quaternionen, 28
Quotientenräume, 5
- Rahmenbündel, 31
Rang
 der Tangentialabbildung, 10
Raum der alternierenden k -Formen, 32
Raum der glatten k -Formen, 35
 mit Werten im Bündel E , 46
rechts-invariant, 22
rechts-operierend, 24
reelles Vektorbündel, 30
reguläre Nullstelle, 102
regulärer Schnitt, 102
regulärer Wert, 8
Ricci-Transformation, 124
Riemannsche Metrik, 108
Riemannsche Untermannigfaltigkeit, 114
Riemannscher Zusammenhang, 111
- Satz
 von Bianchi, 57
 von Bonnet-Myers, 126
 von der Eindeutigkeit von Integralkurven, 15
 von der Existenz von Integralkurven, 15
 von der inversen Funktion, 8
 von Frobenius, 41, 74
 von Gauss, 119
 von Hadamard, 126
 von Hopf-Rinow, 121, 122
 Whitney-Hirsch-Einbettungssatz, 25
Schief-Derivation, 33
Schnitt
 Ableitung entlang einer Kurve, 70
 entlang einer Kurve, 70
 glatte, 12
 stetige Funktionenkeime, 7
Stiefel-Whitney-Klasse, 83
Struktur-Gleichung, 53
 zweite, 58
Submersion, 10
symmetrischer Zusammenhang, 111
- Tangentialabbildung, 7

Index

- Immersion, 10
- Rang, 10
- Submersion, 10
- Tangentialbündel, 12
- Tangentialraum, 6
 - Horizontalteil, 40
 - Vertikalteil, 40
- tautologisches Linien-Bündel, 61
- topologische Mannigfaltigkeit, 3
- Torsion, 111
- total normale Umgebung, 121
- totale Chern-Klasse, 87
- transitive Wirkung, 24
- trivialer Zusammenhang, 51
 - lokal, 51
- Trivialisierung
 - lokale, 24
- Unterbündel
 - Distribution, 40
- Untergruppe
 - abstrakte, 27
 - homogener Raum, 27
 - Isotropie-Gruppe, 27
- Untermannigfaltigkeit, 4
- Vektorbündel
 - Euklidische Metrik, 89
 - komplexes, 30
 - komplexes Linien-Bündel, 59
 - reelles, 30
 - tautologisches Linien-Bündel, 61
 - Unterbündel, 40
 - Zusammenhang, 49
- Vektorfeld
 - Fluss, 15
 - glatter Schnitt, 12
 - glattes, 12
 - induziertes, 16
 - Integralkurve, 14
 - Kommutator, 13
 - komplett, 15
 - Lie-Ableitung, 36
 - Lie-Klammer, 13
 - links-invariant, 20
 - Produkt-Klammer, 13
 - rechts-invariant, 22
- verallgemeinerte Produktregel, 46
- verallgemeinertes Dach-Produkt, 54
- Vereinheitlichung, 126
- Volumenform, 93
- Weyl-Gruppe, 101
- Whitney-Hirsch-Einbettungssatz, 25
- Wirkung
 - eigentliche, 25
 - freie, 24
 - glatte, 23
 - rechts-operierend, 24
 - transitive, 24
- zugeordnetes Faserbündel, 29
- zusammenhängend, 23
- Zusammenhang, 45
 - affiner, 48
 - flacher, 51
 - im Vektorbündel, 49
 - kanonischer Produkt-Zusammenhang, 48
- Krümmung, 51
- Levi-Civita-Zusammenhang, 111
- lokal trivial, 51
- orthogonaler, 89
- Riemannscher, 111
- symmetrischer, 111
- Torsion, 111
- trivial, 51
- Zusammenhangs-Form, 47